Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanna Togliatti

Note sulla proiezione stereografica polare dell'ellissoide terrestre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.5, p. 312–315.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_5_312_0>

Geodesia. — *Note sulla proiezione stereografica polare dell'ellissoide terrestre.* Nota di GIOVANNA TOGLIATTI, presentata (*) dal Socio L. SOLAINI.

SUMMARY. — The equations of a stereographical representation of the ellipsoid on a plane, tangent to it in one of its poles, are sought, through a projection from the opposite pole. The equations of such a map in finite terms, come out to be very simple and easy to compute. Then, a comparison is made with the usual conformal stereographical projection, and the conclusion is reached that the linear deformations are equal in the two types of representation. Finally, the angular deformations of the polar projection are computed which, for high latitudes, are almost neglegible.

Come è noto, si intende per proiezione stereografica polare della sfera su di un piano una rappresentazione in cui i punti di un emisfero vengono proiettati su di un piano tangente ad esso nel polo dal polo opposto. Le equazioni in coordinate polari di tale carta sono:

$$\rho = 2\, r\, tg \frac{\beta}{2} \qquad (\beta = \text{colatitudine}) \tag{1}$$

$$\lambda' = \lambda. \tag{2}$$

La proiezione è conforme ed il suo modulo di deformazione lineare si può esprimere come [1]:

$$m = 1 + tg^2\, \beta/2. \tag{3}$$

Quando invece si presenta il problema di ricercare una analoga rappresentazione dell'ellissoide sul piano da utilizzarsi per le alte latitudini, si ricorre di solito [1] ad una proiezione in cui il meridiano origine venga sviluppato sulla carta secondo la stessa legge (1), dopo aver sostituito l'ellissoide con la sfera locale. Si impone quindi la condizione che la proiezione risulti conforme e da queste premessse si ricavano mediante sviluppi in serie le formule di passaggio dalle coordinate geografiche a quelle piane.

Lo scopo della presente Nota è quello di ricavare in termini finiti le equazioni di una rappresentazione stereografica polare la quale ovviamente non sarà più conforme, di valutare la deformazione angolare alle alte latitudini e di confrontare il suo modulo di deformazione lineare con quello della proiezione stereografica conforme. Infatti, qualora la deformazione angolare introdotta fosse trascurabile, potrebbe essere conveniente utilizzare una rappresentazione cartografica le cui equazioni risultano sicuramente più semplici di quelle ricavate in [1] imponendo la condizione di conformità.

(*) Nella seduta del 12 novembre 1966.

Per semplificare i calcoli si sono utilizzate le equazioni dell'ellissoide di rotazione in cui compaiono come parametri l'anomalia eccentrica α e la longitudine λ. Le coordinate cartesiane, riferite ad una terna d'assi ortogonali con origine nel centro dell'ellissoide sono, come noto:

$$x = a \cos\alpha \cos\lambda \qquad y = a \cos\alpha \operatorname{sen}\lambda \qquad z = c \operatorname{sen}\alpha \tag{4}$$

da cui

$$E = a^2 (1 - e^2 \cos^2\alpha) \qquad F = 0 \qquad G = a^2 \cos^2\alpha \tag{5}$$

$$ds^2 = a^2 (1 - e^2 \cdot \cos^2\alpha)\, d\alpha^2 + a^2 \cos^2 \alpha d\lambda^2. \tag{6}$$

Imponendo ora la condizione di allineamento fra il polo O $(0, 0, -c)$ un punto P $(x\,y\,z)$ dell'ellissoide ed il suo omologo sulla carta P' $(x'\,y'\,c)$ si possono ricavare le equazioni della carta:

$$\rho = 2a \frac{\cos\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha} \qquad \lambda' = \lambda; \tag{7}$$

l'elemento lineare su di essa:

$$ds'^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\lambda^2 = \frac{4a^2}{(1 + \operatorname{sen}\alpha)^2} (d\alpha^2 + \cos^2 \alpha d\lambda^2) \tag{8}$$

e l'angolo θ', proiezione di θ, formato col raggio vettore da una linea L' proiezione di L:

$$tg\,\theta' = \rho \frac{d\lambda}{d\rho} = \rho \left(\pm\, tg\,\theta \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \right) \cdot \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{-2\alpha} = \mp\, tg\,\theta \sqrt{1 - e^2 \cos^2\alpha}\,. \tag{9}$$

Per passare ora dall'anomalia eccentrica α alla latitudine φ si può ricordare che, in un punto dell'ellissoide, le equazioni della tangente e della normale principale al meridiano sono rispettivamente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c \cos\alpha}{a \operatorname{sen}\alpha} \tag{10}$$

$$tg\,\varphi = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{c}\, tg\,\alpha \tag{11}$$

da cui, indicando come al solito $W^2 = 1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen}\varphi}{W} \qquad \cos\alpha = \frac{\cos\varphi}{W} \qquad \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{W^2}\,. \tag{12}$$

Le equazioni polari della carta divengono pertanto:

$$\begin{cases} \rho = 2a \dfrac{\cos\varphi}{W + \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen}\varphi} \\ \lambda' = \lambda. \end{cases} \tag{13}$$

Ponendo inoltre $V^2 = W^2/(1 - e^2)$ ed introducendo il valore della gran-normale N la prima delle (13) diventa:

$$\rho = \frac{2a}{W} \cdot \frac{\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi/V} = \frac{2\,N \cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi/V}\,. \tag{14}$$

Le equazioni cartesiane in termini finiti della rappresentazione stereografica polare saranno quindi:

$$(15)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{2\,\mathrm{N}\cos\varphi\cos\lambda}{1+\operatorname{sen}\varphi/\mathrm{V}} \\[2ex] y' = \dfrac{2\,\mathrm{N}\cos\varphi\operatorname{sen}\lambda}{1+\operatorname{sen}\varphi/\mathrm{V}}\,, \end{cases}$$

espressioni molto semplici e di facile calcolo dato che i valori che vi compaiono sono tabulati per tutti i valori delle latitudini.

Per valutare la deformazione angolare basta sostituire le espressioni (12) anche nella (9)

$$(16)\qquad \left|\frac{tg\,\theta'}{tg\,\theta}\right| = \sqrt{1 - e^2\frac{\cos^2\varphi}{\mathrm{W}^2}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{W}} = 1 - \frac{1}{2}\,e^2\cos^2\varphi + \cdots.$$

Ponendo $\theta' = \theta + \delta$ ed arrestando lo sviluppo in serie dopo i primi due termini si ha:

$$(17)\qquad \frac{tg\,\theta'}{tg\,\theta} = 1 + \frac{\delta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = 1 - \frac{1}{2}\,e^2\cos^2\varphi$$

$$(18)\qquad \delta = -\frac{1}{2}\,e^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\frac{1}{4}\,e^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}2\,\theta\,.$$

Il massimo dell'espressione (18) si ha per $\theta = 45^\circ$. In tal caso, e per valori di $\varphi = 85^\circ, 80^\circ, 75^\circ$ e 70° rispettivamente, si ottiene:

$$(19)\qquad \begin{array}{ll} \varphi = 85^\circ & \delta = 2{,}6'' \\ \phantom{\varphi = {}}80^\circ & \phantom{\delta = {}}10{,}5'' \\ \phantom{\varphi = {}}75^\circ & \phantom{\delta = {}}23{,}2'' \\ \phantom{\varphi = {}}70^\circ & \phantom{\delta = {}}40{,}5''. \end{array}$$

Risulta quindi che per le alte latitudini, la deformazione angolare causata dalla proiezione polare non ha sensibile influenza.

La espressione del modulo di deformazione lineare nella proiezione considerata si deduce riprendendo la (6) e la (8); si ottiene:

$$(20)\qquad m = \frac{2}{1+\operatorname{sen}\alpha}\cdot\left[1 - \frac{e^2\cos^2\alpha\,d\alpha^2}{d\alpha^2+\cos^2\alpha\,d\lambda^2}\right]^{-1/2}$$

e, sostituendo φ ad α, mediante le (12), si ricava:

$$(20\,\mathrm{a})\qquad m = \frac{2}{1+\dfrac{\sqrt{1-e^2}\operatorname{sen}\varphi}{\mathrm{W}}}\left[1 + \frac{e^2\cos^2\varphi\,d\varphi^2}{(1-e^2)\,d\varphi^2 + \dfrac{\mathrm{W}^4}{1-e^2}\cos^2\varphi\,d\lambda^2}\right]^{1/2}.$$

Per i calcoli numerici, si può utilizzare una espressione approssimata della (20 a), ottenuta sviluppando in serie la radice quadrata e arrestando lo sviluppo al primo termine. Si ha:

$$(21)\qquad m = \frac{2}{1+\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\mathrm{V}}}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{e^2\cos^2\varphi\,d\varphi^2}{(1-e^2)\,d\varphi^2 + \dfrac{\mathrm{W}^4}{1-e^2}\cos^2\varphi\,d\lambda^2}\right].$$

Ovviamente, dato che la rappresentazione non è conforme, m dipende dal rapporto $d\varphi/d\lambda$. Si può calcolarne i valori minimi e massimi ponendo successivamente $d\varphi = 0$ $d\lambda = 0$, ossia lungo i cerchi proiezioni dei paralleli o lungo le rette proiezioni dei meridiani. Si ha rispettivamente

$$(22) \qquad \varphi = \text{cost.} \qquad m_\varphi = \frac{2}{1 + \operatorname{sen}\varphi/V}$$

$$(23) \qquad \lambda = \text{cost.} \qquad m_\lambda = \frac{2}{1 + \operatorname{sen}\varphi/V} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{e^2\cos^2\varphi}{W^2}\right] = m_\varphi\,[1 + A].$$

Per le 4 latitudini precedentemente usate si sono calcolati m_φ ed A. I valori di A sono molto piccoli, come si poteva prevedere dato che la rappresentazione si discosta molto poco da quella conforme.

A scopo di confronto si sono anche valutati i corrispondenti valori di m nella proiezione stereografica conforme la cui espressione generale, arrestata ai primi termini è data da:

$$(24) \qquad m = 1 + \frac{1}{4}(1 - \eta_0^2 + \eta_0^4)(\varphi_0 - \varphi)^2 + \frac{1}{4}\cos^2\varphi_0\,(1 + \eta_0^2)\,\lambda^2 .$$

In questo caso, siccome la deformazione è calcolata a partire dal polo si ha $\eta_0 = e'^2\cos^2\varphi_0 = 0$ e la (24) si riduce a $m = 1 + \frac{1}{4}\beta^2$

(25)	$\varphi = 85^\circ$	$m_\varphi = 1{,}0019$	$A = 0$	$m = 1{,}0019$
	80°	$1{,}0077$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1{,}0076$
	75°	$1{,}0174$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1{,}0171$
	70°	$1{,}0313$	$4 \cdot 10^{-4}$	$1{,}0305$

Si può notare dalle (25) che le deformazioni lineari causate dalle due proiezioni stereografiche, conforme e polare, sono uguali. Quest'ultima come si è visto, è, per le alte latitudini poco discosta da una proiezione conforme e presenta in compenso il notevole vantaggio di poter essere espressa con formule finite e di grande semplicità.

BIBLIOGRAFIA.

[1] JORDAN-EGGERT-KNEISSL, *Handbuch der Vermessungskunde*, Band IV.