
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CARLO VENINI

Osservatore ruotante rispetto ad un osservatore inerziale in Relatività

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 41 (1966), n.5, p. 300–307.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_5_300_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Osservatore ruotante rispetto ad un osservatore inerziale in Relatività* (*). Nota di CARLO VENINI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — The behaviour of an observer in rotatory motion, with respect to an inertial observer, is studied under special Relativity.

It is found that the angular velocity depends on the distance from the rotation axis, contrary to the classic case.

The most general space-time transformations between the considered observers are established.

Scopo della presente Nota è lo studio del comportamento, nello spazio-tempo pseudoeuclideo della Relatività ristretta, di un osservatore O' in moto rotatorio rispetto ad un osservatore inerziale O . Il riferimento corrispondente ad O' viene essenzialmente individuato dalla condizione che un generico punto con esso solidale descriva rispetto al riferimento inerziale, il cui spazio geometrico è euclideo, una circonferenza con centro sull'asse di rotazione e posta in un piano normale all'asse stesso.

Considero dapprima il caso in cui l'osservatore O' ruota uniformemente ed estendo successivamente la ricerca ad un osservatore in moto rotatorio generico. Riteniamo per ora O' in moto uniforme.

Detto r il raggio della circonferenza, misurato da O , in Cinematica classica la velocità v rispetto ad O del generico punto solidale con O' risulta notoriamente uguale ad ωr , dove ω , conformemente al carattere di uniformità del moto, non dipende né dal posto né dal tempo e si identifica con la velocità angolare dell'osservatore O' .

La circostanza che la velocità di un punto rispetto ad un riferimento inerziale non possa superare in Relatività la velocità c della luce nel vuoto rispetto al medesimo riferimento [1] impone che in Cinematica relativistica v non risulti proporzionale ad r . Riguardo allora, nel moto uniforme, v come prodotto fra una funzione $\omega(r)$ ed r , interpretando $\omega(r)$ come *velocità angolare relativistica* di O' rispetto ad O . La funzione $\omega(r)$ deve innanzitutto soddisfare alla relazione $\omega(r)r < c$ per qualunque valore finito della coordinata raggio r ; per la natura del problema occorre inoltre che ω sia tale che la velocità ωr , nulla sull'asse, venga rappresentata da una funzione crescente di r e tenda a c al tendere di r all'infinito; trattando infine c come un infinito, ω deve ridursi ad una costante, come in Meccanica classica.

Al fine di pervenire ad una funzione che soddisfa ai precedenti requisiti bisogna stabilire una proprietà riguardante l'osservatore O' , che ritengo solidale con un continuo che si deforma, un *fluido*.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1966.

Premetto che in Meccanica classica il riferimento uniformemente ruotante può considerarsi solidale con un fluido il cui vettore vortice $\mathbf{u} \equiv 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{v}$ dello spazio tridimensionale si identifica con il vettore costante $\boldsymbol{\omega}$, diretto come l'asse di rotazione. Anzi, supponendo a priori $\boldsymbol{\omega}$ funzione di r ed imponendo ad $\mathbf{u}$ di uguagliare una assegnata costante $\boldsymbol{\omega}_0$, si trae una equazione differenziale alla quale, se si vuole che la velocità si annulli sull'asse, si soddisfa con l'integrale particolare $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$.

In Relatività il precedente vettore spaziale viene sostituito dal vettore vortice dello spazio-tempo quadridimensionale, di componente controvariante:

$$(a) \quad \Omega^\alpha \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_\beta \lambda_{\delta/\gamma} \quad [2],$$

dove λ_β rappresenta la generica componente covariante del vettore velocità relativistica (di norma unitaria) ⁽¹⁾.

Nella presente Nota introduco appunto il vettore vortice (a), associandolo al moto di O' . Seguendo il medesimo procedimento della Meccanica classica, ossia imponendo a tale vettore di essere costante, pervengo ad una equazione differenziale del primo ordine la quale è soddisfatta da una velocità angolare funzione della sola r e dotata di tutte le necessarie proprietà. Nel moto rotatorio uniforme relativistico risulta così costante non il vettore velocità angolare dello spazio geometrico, ma il vettore vortice dello spazio-tempo.

La precedente equazione coincide con quella che ha ottenuto Hill [3] per lo stesso problema, ma imponendo condizioni del tutto diverse; questo problema è stato pure affrontato da Rosen [4] e Takeno [5], i quali sono pervenuti a funzioni $\omega(r)$ differenti da quella dedotta in questa Nota.

Tutti gli altri Autori [6] che a mia conoscenza si sono occupati dell'argomento hanno ritenuto valide le ordinarie formule di trasformazione della Meccanica classica fra O ed O' , ritenendo costante $\boldsymbol{\omega}$. Ma questo è accettabile soltanto in via approssimata, perché implica per O' l'esistenza di un orizzonte spaziale, che gli permette di giudicare solo una parte degli eventi descritti da O , ossia quegli eventi che si verificano ad una distanza dall'asse di rotazione, misurata da O , non superiore a c/ω .

Stabilisco poi le più generali formule di trasformazione che caratterizzano, in Relatività ristretta, il passaggio da un riferimento inerziale ad un riferimento uniformemente ruotante rispetto al primo.

Estendo successivamente la presente ricerca ad un osservatore in moto rotatorio generico rispetto ad un osservatore inerziale, ritenendo $\boldsymbol{\omega}$ funzione anche del tempo, misurato da O con orologi normali. Uguagliando il vettore vortice non ad una costante, ma ad una assegnata funzione del solo tempo

(1) Nella (a) la barra è simbolo di derivazione tensoriale, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è la generica componente controvariante del tensore quadruplo di Ricci; a causa della emisimmetria di quest'ultimo rispetto ad ogni coppia di indici la barra può essere sostituita dalla virgola, simbolo di derivazione parziale. Si sottintende, qui ed in seguito, il simbolo di sommatoria rispetto agli indici di covarianza (in basso) e di controvarianza (in alto) che si saturano.

(dipendente dal moto che si considera) pervengo ad una equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine, la quale è soddisfatta da una velocità angolare $\omega(r, t)$ che, in ogni istante, gode delle medesime proprietà possedute dalla velocità angolare nel moto rotatorio uniforme.

Determino infine le più generali formule di trasformazione relativistiche che individuano il passaggio da un osservatore inerziale ad un secondo osservatore in moto rotatorio generico rispetto al primo.

1. IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA. - È ben noto che la metrica dello spazio-tempo pseudoeuclideo riferita ad un osservatore inerziale O è individuata dalla forma pseudopitagorica:

$$(1) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

se O si avvale di coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2, x_3 per individuare la posizione di un punto del proprio spazio geometrico euclideo e di orologi normali locali e solidali con esso per misurare il tempo t . Introduciamo nel piano x_1, x_2 un sistema di coordinate polari r, θ con il polo nell'origine degli assi cartesiani; la (1) diviene allora:

$$(2) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + dx_3^2).$$

Supponendo per ora O' in moto rotatorio uniforme rispetto ad O , definiamo il riferimento uniformemente ruotante mediante la condizione che per un generico punto con esso solidale sia:

$$(I) \quad r = \text{cost.} \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} \equiv \omega = \text{cost.} \quad ; \quad x_3 = \text{cost.},$$

dove ω rappresenta la velocità angolare del punto considerato. Tale punto si muove di moto uniforme rispetto al riferimento inerziale, descrivendo una circonferenza con velocità:

$$(3) \quad v = \omega r,$$

essendo r il raggio della circonferenza stessa, il cui centro è posto sull'asse di rotazione x_3 .

A priori possiamo affermare che, dovendo essere $v < c$, la velocità angolare ω non può essere la medesima per tutti i punti solidali con il riferimento ruotante; riteniamola allora una funzione di r (e non del tempo, per il carattere di uniformità del moto) tale che la disuguaglianza:

$$(4) \quad \omega(r) r < c$$

risulti soddisfatta per qualunque valore finito di r .

Per la natura del problema ω deve poi essere tale che v , fornita dalla (3), sia una funzione crescente della distanza r dall'asse e tenda a c al tendere di r all'infinito; inoltre, trattando c come un infinito, è necessario che ω si riduca ad una costante, come avviene in Meccanica classica.

Posto $\omega(0) = \omega_0$, dalla (3) segue: $v = \omega_0 r + \dots$.

In un intorno dell'asse di rotazione la velocità deve così risultare proporzionale alla distanza dall'asse stesso, come in Meccanica classica per qualunque valore di r , mentre per elevati valori di r ciò non deve accadere.

2. DETERMINAZIONE DELLA VELOCITÀ ANGOLARE. — Associamo al moto dell'osservatore uniformemente ruotante il vettore spazio-temporale:

$$(5) \quad \Omega^\alpha \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_\beta \lambda_{\delta,\gamma},$$

detto vettore *vortice*, o vettore *spin* [2], essendo $\lambda^0 \equiv \frac{dx^0}{ds}$.

Nel sistema di riferimento dello spazio-tempo pseudoeuclideo che dà alla metrica la forma pseudopitagorica (1) le componenti del vettore velocità relativistica λ^0 risultano le seguenti, tenendo conto della (3):

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \quad ; \quad \lambda_1 = -\lambda^1 = -\frac{v_1}{c \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = \frac{\omega x_2}{c \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} ; \\ \lambda_2 = -\lambda^2 = -\frac{v_2}{c \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = -\frac{\omega x_1}{c \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \quad ; \quad \lambda_3 = 0, \end{array} \right.$$

essendo: $r^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2$ ed $x_0 \equiv ct$.

Si constata immediatamente, in base alle (II), che l'unica componente non nulla del vettore vortice (5) è:

$$(6) \quad \Omega^3 = \frac{1}{2} [\lambda_0 (\lambda_{1,2} - \lambda_{2,1}) + \lambda_1 (\lambda_{2,0} - \lambda_{0,2}) + \lambda_2 (\lambda_{0,1} - \lambda_{1,0})].$$

La (6), per le (II), dopo alcuni calcoli assume la forma:

$$(7) \quad \Omega^3 = \frac{2\omega + \dot{\omega}r}{2c \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)},$$

dove il punto sovrapposto è simbolo di derivazione ordinaria.

Facendo uso del sistema di riferimento (1) si constata che il vettore Ω^α è orientato nello spazio, poiché la sua norma risulta negativa, e precisamente uguale a $-(\Omega^3)^2$. Per il carattere di uniformità del moto, imponiamo a tale norma, che rappresenta un invariante, di essere costante; di questa proprietà deve godere anche Ω^3 . Introdotta una costante positiva ω_0 , avente le dimensioni di una velocità angolare, poniamo allora:

$$(8) \quad \frac{2\omega + \dot{\omega}r}{2c \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)} = \frac{\omega_0}{c},$$

da cui:

$$(9) \quad \dot{\omega} = \frac{2\omega_0}{r} - \frac{2\omega}{r} - \frac{2\omega_0 r \omega^2}{c^2}.$$

In base alla (3), la (9) si trasforma nella seguente equazione differenziale di Riccati:

$$(10) \quad \dot{v} = 2\omega_0 - \frac{v}{r} - \frac{2\omega_0}{c^2} v^2$$

nella funzione incognita $\dot{v}(r)$.

Imponendo la condizione che la velocità si annulli per $r = 0$, si soddisfa alla (10) assumendo:

$$(11) \quad v(r) \equiv -ic \frac{J_1\left(\frac{2i\omega_0}{c}r\right)}{J_0\left(\frac{2i\omega_0}{c}r\right)} \quad [3] [7].$$

Nella (11) i rappresenta l'unità immaginaria, J_0 , J_1 le funzioni di Bessel di ordine 0 ed 1 rispettivamente, essendo la generica

$$(12) \quad J_m(x) \equiv \frac{x^m}{2^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{z^{2n} n! (m+n)!}$$

notoriamente convergente in corrispondenza a qualunque valore di x .

Per $\omega_0 r/c$ sufficientemente piccolo la (11), tenendo conto della (12), assume la forma:

$$(13) \quad v = \omega_0 r \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0 r}{c} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega_0 r}{c} \right)^4 + \dots \right],$$

mentre per $\omega_0 r/c$ sufficientemente elevato si ha:

$$(14) \quad v = c \left[1 - \frac{1}{4} \frac{c}{\omega_0 r} - \frac{1}{32} \left(\frac{c}{\omega_0 r} \right)^2 + \dots \right].$$

In base alla (14), la velocità tende a c al tendere di r all'infinito; per la (13) si riduce ad $\omega_0 r$ in un intorno del primo ordine dell'asse, ossia è crescente in tale intorno.

Ci proponiamo di dimostrare che v gode di quest'ultima proprietà per ogni valore finito di r . Infatti, se così non fosse, la derivata prima $\dot{v}$, funzione continua a causa della (10) e della (11) e positiva nel precedente intorno, dovrebbe annullarsi in corrispondenza ad un valore R di r , essendo $\dot{v} > 0$ per $r < R$. Ma dalla (10) segue:

$$\ddot{v} = \frac{v}{r^2} - \frac{\dot{v}}{r} - \frac{4\omega_0}{c^2} v \dot{v};$$

sarebbe quindi $\ddot{v}(R) = \frac{v(R)}{R^2} > 0$. Per $r = R$ la funzione $v(r)$ dovrebbe allora ammettere un minimo, il che è impossibile poiché risulta crescente per $r < R$. Sempre per la (13), possiamo affermare che, trattando c come un infinito, risulta $v = \omega_0 r$; in base alla (3), la velocità angolare ω risulta in tal caso costante, come avviene in Meccanica classica, e si identifica con ω_0 .

La funzione $\omega(r) = \frac{v(r)}{r}$, con v fornita dalla (11), soddisfa così a tutte le condizioni imposte nel precedente paragrafo.

3. LE FORMULE DI TRASFORMAZIONE SPAZIO-TEMPORALI FRA GLI OSSERVATORI O ED O'. — Dalle (I) segue che per un punto solidale con il riferimento uniformemente ruotante risulta:

$$(III) \quad r = \text{cost} \quad ; \quad \theta - \omega t = \text{cost} \quad ; \quad x_3 = \text{cost}.$$

D'altra parte, indicando con $\xi', \eta', \varphi', t'$ le *generiche* coordinate spaziotemporali delle quali si serve l'osservatore O', tale punto possiede costanti anche le coordinate spaziali ξ', η', φ' . Le formule di trasformazione, nello spaziotempo pseudoeuclideo, fra le particolari coordinate r, θ, x_3, t di O e quelle generiche di O' sono allora le seguenti:

$$(IV) \quad \begin{cases} t = G(\xi', \eta', \varphi', t') & ; & r = f(\xi', \eta', \varphi') & ; & x_3 = H(\xi', \eta', \varphi') ; \\ \theta = \omega [f(\xi', \eta', \varphi')] G(\xi', \eta', \varphi', t') + F(\xi', \eta', \varphi'), \end{cases}$$

dove G, f, H, F rappresentano funzioni a priori arbitrarie dei loro argomenti, purché il determinante funzionale associato alle (IV) sia diverso da zero. Inoltre $\xi', \eta', \varphi', t'$ debbono costituire coordinate ammissibili, tali cioè che la componente g'_{00} del tensore fondamentale $g'_{\alpha\beta}$ non sia negativa e che risulti definita negativa la forma differenziale quadratica ottenuta dalla metrica di O' con la posizione $dt' = 0$ [8].

Osserviamo che la condizione $g'_{00} \geq 0$ è soddisfatta qualunque siano le funzioni che intervengono ai secondi membri delle (IV). Si ha infatti, per le (IV) stesse:

$$g'_{00} = \left(\frac{\partial G}{\partial t'} \right)^2 \left[1 - \frac{\omega^2 (f)^2}{c^2} \right],$$

ossia, per la (3) e la seconda delle (IV), $g'_{00} > 0$ in corrispondenza ad ogni valore finito di r e $g'_{00} \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$.

Consideriamo le formule di trasformazione:

$$(V) \quad t = T' \quad ; \quad r = r' \quad ; \quad \theta = \omega(r') T' + \theta' \quad ; \quad x_3 = x'_3.$$

Osserviamo che le (V) sono le analoghe di quelle della ordinaria Meccanica classica, dalle quali differiscono soltanto per la variabilità della velocità angolare secondo la (9) ed alle quali si riducono facendo tendere c all'infinito. Si constata facilmente che le coordinate T', r', θ', x'_3 sono ammissibili; le (V) costituiscono le più semplici trasformazioni ammissibili fra O ed O'.

4. ESTENSIONE AL MOTO ROTATORIO GENERICO. — Supponiamo ora O' in moto rotatorio non uniforme rispetto ad O. Ritenendo a priori la velocità angolare funzione anche del tempo t introduciamo ancora, nello spaziotempo, il vettore vortice definito dalla (5). Nel sistema di riferimento (I), l'unica componente non nulla di tale vettore è Ω^3 ; dopo qualche calcolo, si trae:

$$(15) \quad \Omega^3 = \frac{2\omega + \frac{\partial \omega}{\partial r} r}{2c \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right)}.$$

Imponiamo che Ω^3 uguagli una assegnata funzione $\Omega_0(t)/c$ del tempo, dipendente dal moto che si considera. Ad esempio, se si ritiene O' in moto rotatorio uniformemente accelerato, Ω_0 sarà una funzione lineare. Tenendo presente la (3) si perviene alla seguente equazione differenziale:

$$(16) \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 2 \Omega_0 - \frac{v}{r} - \frac{2 \Omega_0}{c^2} v^2.$$

La (16) gode della proprietà di essere formalmente identica alla (10); ne rappresenta una estensione per il fatto che v , derivata prima di v funzione della sola r , viene sostituita dalla $\partial v / \partial r$, mentre $\Omega_0(t)$ sostituisce la costante ω_0 . Imponendo che v si annulli sull'asse, si soddisfa alla (16) assumendo:

$$v(r, t) = -ic \frac{J_1 \left[\frac{2i\Omega_0(t)r}{c} \right]}{J_0 \left[\frac{2i\Omega_0(t)r}{c} \right]}.$$

La velocità così ottenuta cresce, in qualsiasi istante, con la distanza dall'asse e all'infinito si approssima alla velocità c della luce. Trattando infine c come un infinito, risulta $v = \Omega_0(t)r$, ossia $\omega = \Omega_0(t)$, come in Meccanica classica.

Indicando con $\varepsilon(r, t)$ una funzione tale che $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \omega(r, t)$, le più generali formule di trasformazione che individuano il passaggio da O ad O' risultano le seguenti:

$$(VI) \quad \begin{cases} t = G(\xi', \eta', \varphi', t') & ; & r = f(\xi', \eta', \varphi') & ; & x_3 = H(\xi', \eta', \varphi'); \\ \theta = \varepsilon[f(\xi', \eta', \varphi'), G(\xi', \eta', \varphi', t')] + F(\xi', \eta', \varphi'). \end{cases}$$

Si constata facilmente che le particolari coordinate T', r', θ', x'_3 tali che:

$$(VII) \quad t = T' \quad ; \quad r = r' \quad ; \quad \theta = \varepsilon(r', T') + \theta' \quad ; \quad x_3 = x'_3$$

sono ammissibili.

Concludiamo osservando che le (VII) sono le analoghe delle ordinarie formule classiche, dalle quali differiscono perché ε risulta funzione anche di r' e alle quali si riducono ritenendo c infinito. In tal caso, infatti, si ha $\omega = \Omega_0(t)$ ed è allora lecito scegliere ε dipendente dalla sola t , ossia, per la prima delle (VII), dalla sola T' .

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- [1] Cfr. B. FINZI e M. PASTORI; *Calcolo tensoriale e Applicazioni*, Bologna 1961, p. 437.
- [2] J. L. SYNGE, *Relativity: The General Theory*, Amsterdam 1960, p. 172.
- [3] E. HILL, *A note on rotational motion in Relativity Theory*, « Phys. Rev. », 69, 488 (1946).
- [4] N. ROSEN, *Note on the problem of uniform rotation*, « Phys. Rev. », 70, 93 (1946).
- [5] H. TAKENO, *On relativistic theory of rotating disk*, « Progr. theor. Phys. », 7, 367 (1952).

- [6] Cfr.: ALBA ANDRADE FERNANDO, *Gravitational fields of rotating bodies*, « Bol. Soc. Mat. Mexicana », 2, 57 (1945); O. COSTA DE BEAUREGARD, *La theorie de la Relativité restreinte*, 1949, p. 45; G. FERRARESE, *Sul campo gravitazionale einsteiniano generato da una massa sferica ruotante*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », 32, 658 (1962); V. FOCK, *The Theory of space time and gravitation*, Oxford 1964, p. 119; M. GALLI, *Le deformazioni relativistiche di un cilindro ruotante*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », 12, 86 e 569 (1952); C. MÖLLER, *The Theory of Relativity*, Oxford 1952, p. 223; M. THIRRING, *Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie*, « Phys. Zs. », 19, 33 (1918); IDEM, 22, 29 (1921); M. A. TONNELAT, *Les principes de la théorie électromagnétique et de la Relativité*, Paris 1959, p. 268.
- [7] Cfr. G. MURPHY, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, New York 1960, pp. 15 sgg.
- [8] Cfr. W. PAULI, *Teoria della Relatività*, Trad. It. di P. GULMANELLI, Torino 1958, p. 98.