Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marie-Louise Dubreil-Jacotin

Quelques propriétés des O-Demi-Groupes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.5, p. 279–289.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_5_279_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Matematica. — *Quelques propriétés des O-Demi-Groupes.* Nota di MARIE-LOUISE DUBREIL-JACOTIN, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Per un semigruppo, D, il fatto ch'esso possa venire ordinato totalmente implica certe proprietà di struttura, legate alla considerazione dell'equivalenza in fusi (secondo S. Schwartz), ravvicinanti D a dei semigruppi abeliani.

Suivant la terminologie classique dans les groupes ordonnés [1] nous appellerons O-demi-groupe un demi-groupe pouvant être totalement ordonné; O*-demi-groupe un demi-groupe tel que toute relation d'ordre de ce demi-groupe admette une extension maximale qui soit un ordre total.

Nous allons donner quelques propriétés de structure des O-demi-groupes liées à la considération de l'équivalence en fuseaux.

1. Nous allons d'abord faire quelques remarques préliminaires.

1) Il est d'usage dans un demi-groupe D de considérer dans l'ensemble E des idempotents la relation d'ordre

$$e < f \Longleftrightarrow ef = fe = e \text{ (ou la relation opposée } e < f \Longleftrightarrow ef = fe = f)$$

appelée par Clifford « ordre partiel naturel » [2].

Appelons comme Clifford « bande » un demi-groupe idempotent. On sait [2] qu'une bande commutative est pour l'ordre partiel naturel un demi-treillis. Nous remarquerons de plus que:

PROPOSITION 1. – *L'ordre partiel naturel est un ordre maximal pour le demi-groupe constitué par une bande commutative. Une bande commutative n'est donc pas un* O* *demi-groupe en général.*

D'abord la relation d'ordre est bien dans ce cas isotone puisque $ef = fe = e$ entraîne $efg^2 = feg^2 = eg^2$, qui s'écrit, puisque $eg^2 = eg$, $efg^2 = (eg)(fg)$, $(eg)(fg) = (fg)(eg) = eg$.

Pour voir que cet ordre est maximal, il nous suffit de considérer deux éléments e et f non comparables c'est-à-dire tels que $ef = fe$ est $\neq e$ et $\neq f$. (Si on avait $ef = fe = e$ ou f pour tout e et f, la bande commutative serait – par ce procédé – totalement ordonnée). Alors l'introduction de $e < f$ par exemple entraîne que $e \leq ef \leq f$ par l'isotonie, c'est-à-dire que e et f engendrent le demi-groupe constitué par la chaine stricte $e < ef < f$ qui ne peut appartenir à un ordre extension de l'ordre naturel pour lequel e et f sont tous deux plus petits (ou plus grands) que ef.

(*) Nella seduta del 12 novembre 1966.

2) On sait qu'étant donné un demi–groupe D, on peut toujours, s'il n'a pas d'élément neutre u, lui en adjoindre un et considérer le demi–groupe $D^* = D \cup \{u\}$.

PROPOSITION 2. – *Si* D *est un* O*–demi–groupe*, $D^* = D \cup \{u\}$ *n'en est pas un en général.*

Il suffit pour s'en assurer de donner un exemple. Considérons la bande (B) donnée par sa table:

	e	a	b	f
e	e	a	b	b
a	a	a	b	b
b	a	a	b	b
f	a	a	b	f

qui est un O–demi–groupe puisqu'elle admet l'ordre:

$$e < a < b < f.$$

Adjoingnons à B l'élément neutre u et essayons d'ordonner totalement $B^* = B \cup \{u\}$. Si on posait $u < a$ l'isotonie entraînerait:

$$ue = e < a = ea \qquad \text{et} \qquad uf = f \leq a = fa.$$

Mais $e < a$ et $f < a$ avec $fe = a$ est incompatible avec e comparable à f qui exige que fe soit compris entre f et e. Comme $a < u$ entraîne de même $a < f$ et $a < e$ on ne peut définir aucun ordre total sur B^*.

Cette propriété est liée à la considération des éléments positifs et négatifs d'un demi–groupe ordonné. Cette notion fondamentale dans le cas d'un groupe ordonné (puisque l'ordre d'un groupe est donné par son cône positif) n'a pas d'analogue satisfaisant dans le cas d'un demi–groupe.

Considérons d'abord le cas simple d'un demi–groupe unitaire D^* c'est–à–dire possédant un élément neutre u. Nous appellerons alors *positif* (ou strictement positif) un élément a vérifiant

$$a \geq u \qquad (\text{ou } a > u). \tag{1}$$

L'isotonie entraîne alors dans les deux cas

$$x \leq ax \qquad \text{et} \qquad x \leq xa \qquad \text{quel que soit } x \in D^* \tag{2}$$

et en particulier

$$a \leq a^2. \tag{3}$$

Naturellement, on définit de la manière duale un élément négatif. u est le seul élément à la fois positif et négatif. Rappelons [1] que si le demi–groupe D n'est pas unitaire, on appelle *positif* tout élément a vérifiant (2), c'est–à–dire à la fois positif à gauche ($ax \geq x \ \forall x \in D$) et positif à droit ($xa \geq x$, $\forall x \in D$). Alors tout élément plus grand qu'un élément positif est positif et si P_g, P_d, P désignent l'ensemble des éléments positifs à gauche, à droite ou positifs, on a $P^2 \subseteq P$. On définit de la manière duale les éléments négatifs

à gauche à droite et négatifs et si N est l'ensemble de ces derniers $N^2 \subseteq N$. Remarquons alors que si D est totalement ordonné, mais n'est pas unitaire, on n'a pas en général $D = P \cup N$, comme le montre par exemple le demi-groupe (B) ci-dessus.

On a $P_g = P_d = P = \{f\}$, $N_g = N_d = N = \{e\}$ et $D - P \cup N = \{a, b\}$. Par suite au théorème ([1], p. 158): « Un demi-groupe ordonné D sans élément neutre peut être immergé dans un demi-groupe ordonné minimal $D^* = D \cup \{u\}$ ayant un élément neutre u, avec préservation de l'ordre et de la propriété pour un élément d'être positif ou négatif si et seulement si dans D : $P_g = P_d$, $N_g = N_d$, on peut donner l'additif suivant:

PROPOSITION 3. – *Si* D *est totalement ordonné,* D* *est totalement ordonné si et seulement si* $D = N \cup P$.

Dans la plupart des travaux antérieurs au livre de L. Fuchs [1] (et pour la bibliographie correspondante, nous renvoyons à ce livre) on suppose le demi-groupe *positivement ordonné*; c'est-à-dire $D = P$.

On suppose souvent aussi la condition supplémentaire

$$(\alpha) \qquad a < b \Longleftrightarrow \exists x \text{ et } y \in D, \qquad ax = b\,,\ ya = b.$$

Un demi-groupe positivement ordonné et vérifiant la condition (α) est dit: *ordonné d'une manière naturelle.*

Depuis, T. Saito a entrepris l'étude des demi-groupes totalement ordonnés sans rien supposer de restrictif sur l'ordre – en dehors, naturellement, de l'isotonie – dans une série de mémoires ou comme approche du problème général il étudie d'abord le cas d'une bande, [3] puis de certains demi-groupes particuliers [4] [5] [6]. Avec Saito, nous appellerons *f-positif* tout élément vérifiant (3) et aussi *f-négatif* tout élément b tel que $b^2 \leq b$. Rappelons les résultats simples mis en évidence par Saito. Le produit de deux éléments *f*-positifs (*f*-negatifs) est *f*-positif (*f*-négatif); tout élément d'un demi-groupe totalement ordonné est ici *f*-positif ou *f*-négatif – mais un élément *f*-négatif peut être plus grand qu'un élément *f*-positif et alors leurs deux produits sont des idempotentes compris entre les deux.

H. Lugowski [7] a d'ailleurs montré que si D est muni d'un ordre total vérifiant (α) un élément *f*-négatif est négatif.

3) En vue d'obtenir des résultats simples concernant les idempotents d'un demi-groupe unitaire, considérons dans un demi-groupe D deux idempotents e et f et les conséquences qu'entraîne la possibilité de définir dans D une relation d'ordre dans laquelle on aurait $e < f$.

L'isotonie entraîne immédiatement:

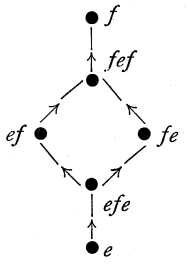
$$\begin{cases} e \leq ef \leq fef \leq f \\ e \leq fe \leq fef \leq f \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e \leq efe \leq ef \leq f \\ e \leq efe \leq fe \leq f \end{cases}$$

d'où résulte $(ef)^2 = ef$, $(fe)^2 = fe$ et:

PROPOSITION 4. – *Deux idempotents e et f d'un demi-groupe* D *ne peuvent être camparables dans une relation d'ordre de* D *que si leurs produits sont deux*

idempotents; ils engendrent un sous-demi-groupe de D *de* 6 *idempotents ordonné en treillis distributif suivant le diagramme:*

(A)



De cette proposition résulte le *résultat de Saito, dans un demi-groupe totalement ordonné les idempotents forment une bande.*

Etudions les différentes bandes possibles engendrées par e et f quand on suppose que (A) est totalement ordonné.

La condition $fe < ef$ entraîne immédiatement $fe \leq efe$ d'où $efe = fe$ et de même $ef = fef$, et on obtient la bande (B), qui peut dégénérer en $e = fe < ef < f$ ou $e < fe < f = ef$ qui peuvent êncore dégénérer en:

(C_1) $e < f = fe = ef$, (C_2) $e = fe = ef < f$ et (D) $e = fe < f = ef$.

La condition $ef < fe$ entraîne de même $ef \leq fef$ d'où

$$ef = efe \quad \text{et de même} \quad fe = fef$$

et la bande (B′) $e < ef = efe < fe = fef < f$ qui peut aussi dégénérer en $e = ef < fe < f$ ou $e < ef < fe = f$ bandes qui peuvent encore dégénérer en (C_1), (C_2) et (D′) $e = ef < f = fe$.

Enfin si on suppose (A) commutatif, $ef = fe$, on a la bande, dégénérescence de B et B′:

(C) $$e < ef = fe < f.$$

qui peut dégénérer en (C_1) ou (C_2).

Le raisonnement fait pour la bande (B) montre que dès que ef (ou fe) est distinct de e et de f on ne peut adjoindre un élément neutre u puisque $u < ef\ (> ef)$ entraîne: e et f inférieurs à ef (supérieurs) en contradiction avec le fait que ef est entre e et f. D'autre part, aucune de ces bandes n'est unitaire (sauf peut-être C_1 et C_2) et nous avons donc comme bandes unitaires totalement ordonnées minimales:

(C_1) $\cup \{u\} : u \leq e < f = ef = fe$; (C_2) $\cup \{u\} : e = fe = ef < f \leq u$;

(D) $\cup \{u\} : e = fe < u < f = ef$; (D′) $\cup \{u\} : e = ef < u < f = fe$.

Nous avons donc:

PROPOSITION 5. – *La bande des idempotents d'un* O*-demi-groupe vérifie* $efe = fe$ *(ou* ef*),* $fef = ef$ *(ou* fe*) quels que soient* e *et* f *si le* O*-demi-groupe est unitaire le produit de deux idempotents quelconques est égal à l'un d'eux.*

D'autre part, parmi les bandes possibles engendrées par e et f, seule: $e < f = ef = fe$ est une bande positivement ordonnée; et de même, seule $e = fe = ef < f$ est une bande négativement ordonnée. Il en résulte:

THÉORÈME 1. – *La bande* D* *des idempotents d'un* O*-demi-groupe unitaire admet une partition en* $\{u\}$ *et deux bandes* A *et* B *telles que:*

$aa' = a'a = a$ ou a' ; $bb' = b'b = b$ ou b' ; $ab = b$ (ou a), $ba = a$ (ou b)

quels que soient les éléments a, a' *de* A, b, b' *de* B.

On peut réciproquement ordonner totalement une telle bande en posant:

$a < u < b$; $\forall a \in A, b \in B$; $a < a' \Longleftrightarrow a = aa' = a'a$; $b < b' \Longleftrightarrow b' = bb' = b'b$

2. Nous allons maintenant utiliser l'équivalence en fuseaux pour obtenir certaines propriétés de structure des O-demi-groupes qui les rapprochent des demi-groupes abéliens.

Les propriétés des demi-groupes abéliens totalement ordonnés liées à cette équivalence ont été données par Nakada [8].

L'extension aux demi-groupes nom abéliens réussit grâce au lemme suivant que nous utiliserons fréquemment.

LEMME: *Si, dans un demi-groupe* D, *ordonné, ab et ba sont comparables,* $ab \leq ba$ (*par exemple*) *entraîne que pour tout entier positif* N:

$$a^N b^N \leq (ab)^N \leq (ba)^N \leq b^N a^N.$$

La démonstration, immédiate, de cette propriété ne fait intervenir que l'isotonie et n'est pas autre chose que celle donnée dans [1] (p. 162) pour les éléments positifs d'un demi-groupe totalement ordonné.

Rappelons que:

L'équivalence en fuseaux est définie dans tout demi-groupe D *par:* $a \equiv b$ (F) *si il existe des entiers positifs* m *et* n *tels que* $a^m = b^n$.

Cette équivalence n'est pas en général compatible avec l'opération du demi-groupe. Les fuseaux ne sont pas en général des parties stables (c'est-à-dire des sous-demi-groupes de D); il en est cependant ainsi si D est commutatif.

Evidemment un fuseau contient au plus un idempotent; les fuseaux sont donc de deux sortes:

1° Ceux Φ_ν, $\gamma \in I$, qui ne contiennent pas d'idempotents: ils sont donc constitués par des éléments d'ordre infini puisque Φ contient avec a toutes ses puissances et puisque si a est d'ordre fini une de ses puissances est un idempotent.

2° Ceux F_λ, $\lambda \in \Lambda$ qui contiennent un idempotent e_λ et qui peuvent être définis par $F_\lambda = \{x ; x \in D ; \exists\, n$ entier positif : $x^n = e_\lambda\}$.

On a:

$$D = \Phi \cup F, \quad \Phi \cap F = \varnothing$$

avec

$\Phi = \cup \Phi_\nu$, $\nu \in I$ ensemble des éléments d'ordre infini de D

$F = \cup F_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ partie avec torsion T de D.

On sait qu'à tout idempotent e_λ de D est associé un groupe G_λ, sous-groupe de D maximum ayant e_λ pour élément neutre, deux groupes G_λ, $G_{\lambda'}$, $\lambda \neq \lambda'$ ayant une intersection vide – de sorte que D admet la partition classique:

(P) $\quad D = \Sigma R_\lambda + R$ où R_λ est le radical du groupe G_λ :

$$R_\lambda = \{x\,,\, x \in D \quad ; \quad \exists p\,,\, x^p \in G_\lambda\}$$

et R est, ou la partie vide, ou une partie infinie dont tout élément est d'ordre infini.

Dans chaque R_λ il faut distinguer la partie avec torsion T_λ et l'ensemble des éléments d'ordre infini I_λ.

Si T_λ n'est pas vide, c'est évidemment le fuseau F_λ.

Si I_λ n'est pas vide et si $d \in I_\lambda$ appartient au fuseau Φ_λ, quelque soit $d' \in \Phi_\gamma$ on a: $d^m = d'^{m'}$ pour certains m et m' entiers positifs et comme il existe l'entier positif p tel que $d^p \in G_\lambda$ on a

$$(d')^{m'p} \in G_\lambda \text{ c'est-à-dire } d' \in I_\lambda\,.$$

Donc:

L'équivalence en fuseaux est plus fine que l'équivalence de partition (P). Nous appellerons *f–demi–groupe* un demi–groupe qui possède un seul fuseau.

Rappelons que si a et b appartiennent à un même groupe G_λ et si, pour la relation d'ordre dans D, $a < b$ cela entraîne strictement pour tout n $a^n < b^n$, relation impossible si a et b sont d'ordre fini. Donc

PROPOSITION 6. – *Dans un* O*–demi–groupe, chaque groupe* G_λ *est sans torsion et le fuseau* F_λ *est défini par*

$F_\lambda = \{x\,;\, x \in D\,;\, \exists\, n$ entier positif, $x^n = x^{n+p}$ pour tout entier p positif

$$x^i \neq x^j\,,\; i \neq j\,,\; i\,,j \in \{1\,,2\,,\cdots,n-1\,,n\}$$

n est l'ordre de x, l'idempotent est un zéro de son fuseau. Si D est unitaire $F_u = \{u\}$.

Si a_λ et $a_{\lambda'}$, sont des éléments de D d'ordre fini appartenant à des fuseaux différents une relation d'ordre $a_\lambda < a_{\lambda'}$ entraîne, pour tout n, $a_\lambda^n \leq a_{\lambda'}^n$, donc $e_\lambda < e_{\lambda'}$, et on a:

PROPOSITION 7. – *Si* D *est un demi–groupe totalement ordonné et si* $e_\lambda < e_{\lambda'}$ *tout élément du fuseau* F_λ *est inférieur à tout élément du fuseau* $F_{\lambda'}$.

PROPOSITION 8. – *Si dans un demi–groupe ordonné* D *des éléments a et b d'un même fuseau sont tels que ab et ba sont comparables, ab et ba appartiennent à ce même fuseau.*

On sait en effet, qu'il existe les entiers positifs m et n tels que $a^m = b^n$.

Le lemme, si $ab \leq ba$ par exemple, nous donne:

$$a^m b^m = b^{n+m} \leq (ab)^m \leq (ba)^m \leq b^m a^m = b^{m+n}\,.$$

On a donc

THÉORÈME 2. – *Dans un* O*–demi–groupe les fuseaux sont stables.*

Considérons d'abord le cas particulier d'un O–demi–groupe dont la bande des idempotents est commutative.

THÉORÈME 3. – *Dans un* O*-demi-groupe* D *dont les idempotents commutent la partie avec torsion* T *est un* O*-demi-groupe dans lequel l'équivalence en fuseaux est compatible.*

d'où le

COROLLAIRE. – *Un* O*-demi-groupe avec torsion* T *dont les idempotents commutent admet une image* O*-homomorphe* $T^* \simeq T/_{(F)}$ *qui est une* O*-bande commutative.*

Soient en effet t_1 et t_2 deux éléments de D d'ordre fini. Pour un ordre total de D on a par exemple $t_1 t_2 \leq t_2 t_1$. Pour N assez grand

$$t_1^N = e_1 \, , \, t_2^N = e_2 \qquad \text{et le lemme donne:}$$

$$e_1 e_2 \leq (t_1 t_2)^N \leq (t_2 t_1)^N \leq e_2 e_1$$

Si $e_1 e_2 = e_2 e_1$, on a: $(t_1 t_2)^N = (t_2 t_1)^N = e_1 e_2$ qui montre d'abord que $t_1 t_2$ et $t_2 t_1$ sont d'ordre fini, et aussi que

$$F_1 F_2 = F_2 F_1 \subseteq \text{Fuseau de } e_1 e_2 \, .$$

Revenons au cas général, nous allons étudier quelques propriétés des fuseaux F_λ c'est-à-dire *d'un* O*-demi-groupe* F_z *avec torsion et zéro* z *comme idempotent.*

A chaque ordre total sur F_z correspond la décomposition $F_z = N_f \cup P_f$ où N_f et P_f sont respectivement l'ensemble des éléments f-négatifs et f-positifs de F_z. On sait que

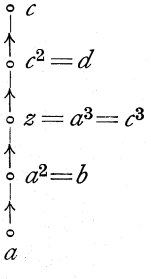
$$N_f^2 \subseteq N_f \quad , \quad P_f^2 \subseteq P_f \quad , \quad N_f \cap P_f = \{z\}$$

On a ici: $p < p^2 \leq z \, , \, n > n^2 \geq z$ pour tout $p \in P_f - \{z\} = P^*$
et tout $n \in N_f - \{z\} = N^*$.

On a donc $N_f P_f = \{z\}$.

Un exemple d'un tel O-demi-groupe est donné par le demi-groupe (F) ci-dessous:

	a	b	z	c	d
a	b	z	z	z	z
b	z	z	z	z	z
z	z	z	z	z	z
c	z	z	z	d	z
d	z	z	z	z	z



Au contraire un demi-groupe F_z ne peut surement pas être totalement ordonné s'il contient trois éléments a_1 , a_2 , a_3 tels que a_1^2 , a_2^2 , a_3^2 soient distincts et différents de z et que trois des produits $a_i a_j$, $i \neq j$, $i = 1 \, , \, 2 \, , \, 3$ soient égaux à z; en effet, deux éléments a_1 et a_2 tels que $a_1^2 \neq a_2^2 \neq z$, $a_1 a_2 = z$ (ou $a_2 a_1 = z$) ne peuvent appartenir tous les deux à N_f ou à P_f .

PROPOSITION 9. – *Si le fuseau* F_z *est totalement ordonné,* P_f *est un* O*–f–demi–groupe positivement ordonné et archimédien.*

Soient en effet a et b deux éléments de P_f, et n et q les ordres de a et b, plus petits entiers tels que $a^n = z$ $b^q = z$.

$q < n$ entraîne $a \leq b$. En effet $b < a$ entraîne $b^q \leq a^q \leq z$, donc $a^q = z$ c'est–à–dire $n \leq q$.

Nous pouvons donc avoir $a < b$ si $q \leq n$ et dans la partition de P_f en éléments de même ordre tout élément d'une classe est inférieur à tout élément d'une classe correspondant à un ordre plus petit. La chaîne

$$a < a^2 < a^3 < \cdots < a^{n-1} < a^n = z$$

est décomposée en classes par cette partition et b se place dans la classe de son ordre entre a^s et a^{s+1}, univoquement déterminés si ordre $a^s <$ ordre $b <$ ordre a^{s+1}, mais qui n'est pas univoquement déterminé en général si la chaîne $a < a^2 \cdots < a^n \leq z$ a une intersection non vide avec la classe de P_f constituée par les éléments de P_f de même ordre que b.

Quoiqu'il en soit, d'une manière unique pour un ordre total s'il en existe un sur P_f, on a s univoquement déterminé tel que

$$a^s < b \leq a^{s+1}$$

et il en résulte

$$a^{s+1} \leq ab \leq a^{s+2},$$

d'où:

$$a \leq ab$$

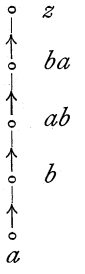
$$b \leq ab,$$

et P_f est bien archimédien puisque si $a < b$, il existe n tel que $b \leq a^n$.

On verrait naturellement de même que N_f, est aussi, pour l'ordre opposé, positivement ordonné et archimédien.

L'exemple de O–*f*–demi–groupe P_f:

	a	b	ab	ba	z
a	ab	ab	z	z	z
b	ba	z	z	z	z
ab	z	z	z	z	z
ba	z	z	z	z	z
z	z	z	z	z	z



montre que P_f n'est, en général, ni commutatif ni ordonné d'une manière naturelle.

Considérons maintenant les fuseaux sans idempotents Φ_v.

THÉORÈME 4. – *Tout fuseau* Φ *sans idempotent d'un* O*–demi–groupe admet une image homomorphe qui est une partie positive stable du groupe additif des rationnels.*

Dans le fuseau Φ considérons un élément fixe b. Soit a un élément quelconque de Φ et m et n des entiers positifs tels que $a^m = b^n$. Si on a aussi $a^{m'} = b^{n'}$, il en résulte $a^{mn'} = a^{m'n}$. Or tout élément de Φ étant d'ordre infini, ceci entraîne $mn' = m'n$ et à tout élément a du fuseau on associe le rationnel n/m. Soient alors a et a' deux élément de Φ auxquels nous associons ainsi n/m et n'/m'. Supposons que pour un ordre total de Φ on ait par exemple $aa' \leq a'a$; le lemme nous donne:

$$a^{mm'} a'^{mm'} \leq (aa')^{mm'} \leq (a'a)^{mm'} \leq a'^{mm'} a^{mm'}.$$

Mais

$$a^{mm'} a'^{mm'} = b^{nm'} b^{n'm} = a'^{mm'} a^{mm'},$$

et on a

$$(aa')^{mm'} = (a' a)^{mm'} = b^{nm'+n m}$$

qui montre que aa' et $a'a$ ont pour image $n/m + n'/m'$.

L'application est donc bien un homomorphisme de Φ dans le cone positif du groupe additif des rationnels.

On a de plus:

PROPOSITION 10. – *Tout fuseau Φ totalement ordonné contenant un élément f-positif c est positivement ordonné et archimédien.*

D'abord tout élément a est faiblement positif car $a^s = c^t$, $c^2 > c$, $a^2 < a$ entraînent, les éléments étant d'ordre infini, $c^t < c^{2t}$, $a^{2s} < a^s$, $a^{2s} < c^{2t}$ en contradiction avec $a^{2s} = c^{2t}$.

Soient alors a et b deux éléments quelconques de Φ et supposons $a < b$, comme il existe les entiers positifs m et n tels que $a^m = b^n$ et puisque b est faiblement positif on a $b < a^m$ et b se place dans la chaine des puissances de a:

$$a^s < b \leq a^{s+1} \tag{1}$$

d'où encore $a^{s+1} \leq ab \leq a^{s+2}$ et Φ est positivement ordonné et archimédien.

2. Considérons maintenant le cas particulier d'un O-demi-groupe vérifiant la condition:

$$a^p = a'^p \quad \text{entraîne} \quad a = a'. \tag{G}$$

Dans un tel demi-groupe, les fuseaux F_{e_ν} contenant un idempotent se réduisent à cet idempotent et la partie avec torsion T est stable – c'est une bande. L'application de a sur m/n est alors injective car si a' s'applique aussi sur m/n, c'est que $a^m = a'^m$ donc que $a = a'$.

On a donc:

THÉORÈME 5. – *Si* D *est un* O*-demi-groupe vérifiant la condition*:

$$a^n = a'^n \quad \textit{entraîne} \quad a = a'. \tag{G}$$

D *est la réunion d'une bande et d'une partie Φ qui admet une partition en* O*-demi-groupes isomorphes à des parties stables positives du groupe additif des rationnels.*

Nous appellerons demi–groupes rationnels de tels demi–groupes, ils sont donc en particulier abéliens.

La condition précédente est réalisée pour un O–groupe puisque $a < a'$ entraîne, l'isotonie y étant stricte,

$$a^n < a'^n$$

Dans ce cas T se réduit à $\{u\}$ et du Théorème 5 on déduit immédiatement [9] le résultat suivant:

THÉORÈME 6. – *Tout O–groupe admet une partition en parties stables* $\Phi_{\nu,i}$, $\nu \in I$ $i \in \{1, 2\}$ *et* $\{u\}$ *telle que les parties* $\Phi_{\nu,1} \cup \Phi_{\nu,2} \cup \{u\}$ *pour tout* $\nu \in I$ *sont des groupes rationnels.*

3. Pour terminer nous ferons les remarques suivantes:

1) D'abord la structure algébrique donnée par le théorème 5 pour un demi–groupe D vérifiant la condition G et pouvant être totalement ordonné serait encore vraie si on savait que D peut être muni d'un ordre tel que l'on puisse en déduire encore que les fuseaux sont stables, totalement ordonnés et que la condition G est satisfaite. Il en est ainsi, par exemple, pour les demi–groupes D, considérés par A. Bigard [10], qui admettent un ordre tel que:

1° D est positivement ordonné

2° $(\exists\, n\,,\ a^n \leq b^n) \Rightarrow a \leq b$

3° D n'a pas de paire anomale [1].

2) Nous remarquerons enfin que nous ne savons rien sur la façon dont se multiplient deux éléments n'appartenant pas à un même fuseau.

Nous ne savons pas non plus si, lorsqu'un élément d'un fuseau Φ_ν est plus petit qu'un élément d'un fuseau $\Phi_{\nu'}$, tout élément de Φ_ν est plus petit que tout élément de $\Phi_{\nu'}$. Néanmoins: *Si* $n \in \Phi_\nu$ *est f–négatif, si* $p \in \Phi_{\nu'}$, *est f–positif et si* $n < p$, *tout élément* $n' \in \Phi_\nu$ *est plus petit que tout élément* p' *de* $\Phi_{\nu'}$.

En effet, de $n'^s = n^t$, $p'^m = p^q$, pour des entiers positifs convenables, résulte $n'^{sq} < p'^{tm}$ et, puisque tout élément de Φ_ν est f–négatif et tout élément de $\Phi_{\nu'}$, f–positif, pour tout $N \geq sq$ et $M \geq tm$ on a $n'^N < p'^M$.

Prenons en particulier $M = N$ il vient $n'^N < p'^N$ qui entraîne bien $n' < p'$.

3) A partir de demi–groupes D_ν, $\nu \in I$ disjoints, on sait que l'on peut construire leur « somme ordinale » D, [1], en prenant la réunion ensembliste

$$D = \bigcup_{\nu \in I} D_\nu$$

ordonnant totalement I et définissant la multiplication dans D de la manière suivante:

x_λ désignant un élément de D_λ nous posons:

$$a_\lambda\, b_{\lambda'} = b_{\lambda'}\, a_\lambda = b_{\lambda'} \quad \text{si} \quad \lambda < \lambda'$$

$$a_\lambda\ b_\lambda \quad \text{dans} \quad D = a_\lambda\ b_\lambda \quad \text{dans} \quad D_\lambda\,.$$

D est bien un demi–groupe.

D est ordonné par:

$$a_{\lambda'} < b_\lambda \quad \text{si } \lambda = \lambda' \text{ et si dans } D_\lambda : a_\lambda < b_\lambda .$$

$$a_{\lambda'} \| b_\lambda , \quad \text{si } \lambda \neq \lambda'.$$

Si les D_λ sont ordonnés d'une manière naturelle la condition (α) permet d'ordonner D totalement, et D est alors ordonné d'une manière naturelle (Clifford [11]). Lorqu'il n'en est pas ainsi il faut remarquer que l'ordre total, extension de l'ordre considéré, obtenu en posant $a_\lambda < b_{\lambda'}$ si $\lambda < \lambda'$ ne fait pas en général de D un demi-groupe totalement ordonné. En effet pour que D soit un demi-groupe ordonné il faut que l'isotonie soit vérifiée.

Or prenons $x_{\lambda'} \in D_{\lambda'}$. On doit avoir

$$a_\lambda x_{\lambda'} = x_{\lambda'} \leq b_{\lambda'} x_{\lambda'}$$

$$x_{\lambda'} a_\lambda = x_{\lambda'} \leq x_{\lambda'} b_{\lambda'} ,$$

et ceci n'est vrai que si $D_{\lambda'}$ est positivement ordonné (cf. [1] p. 173 et [10] p. 4).

On a donc sans peine:

PROPOSITION 11. – *La somme ordinale des demi-groupes totalement ordonnés* D_ν: $D = \bigcup_{\nu \in I} D_\nu$ *admet un ordre total extension de ces ordres totaux si et seulement si tous les* D_ν, *sauf éventuellement le premier s'il existe, sont positivement ordonnés.*

On a aussi que:

La somme ordinale D *de groupes* G_λ *totalement ordonnés ne peut être ordonnée totalement de manière que l'application de* D *sur* Λ *donnée par* $g_\lambda \to \lambda$ *soit isotone, s'il y a plus d'un groupe* G_λ *qui n'est pas reduit à* $\{e_\lambda\}$.

On peut encore remarquer que l'on peut toujours trouver un O-demi-groupe D ayant pour fuseaux des O-fuseaux donnés du type Φ_ν, et aussi des O-fuseaux du type F_λ, mais à condition que tous, sauf un au plus, se réduisent à leur partie P_f ou N_f.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. FUCHS, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press 1963.

[2] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The algebraic Theory of semigroups*, I. «Math. Surveys», VII (1962).

[3] T. SAÏTO, *Ordered idempotent semigroups*, «J. Math. Soc. Japan», *16* (1962).

[4] T. SAÏTO, *Regular elements in an ordered semigroup*, «Pacific J. Math.», *13* (1963).

[5] T. SAÏTO, *Ordered completely regular semigroups*, «Pacific J. Math.», *14* (1964).

[6] T. SAÏTO, *Proper ordered inverse semigroups*, «Pacific J. Math.», *15* (1965).

[7] H. LUGOWSKI, *Über Gewisse Halbmodul mit negativen Elementen*, Publi. Math. Debrecen, 1964.

[8] O. NAKADA, *Partially ordered abelian semigroups*, II «Jour. Fac. Sci. Hokkaido», *12* (1952).

[9] M. L. DUBREIL-JACOTIN, *Quelques propriétés des groupes ordonnés liées à la considération des fuseaux*, «C.R. Ac. Sc.», t. *262*, 989-992 (1966).

[10] A. BIGARD, *Décomposition des demi-groupes ordonnés*, Séminaire Dubreil-Pisot, 1964-65, n° 14.

[11] A. H. CLIFFORD, *Naturally totally ordered commutative semigroups*, «Amer. J. of Math.», vol. LXXVI, No. 3, July, 1954, pp. 631-646.