
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

PIETRO CALOI

L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. - II. La teoria di Somigliana; rettifiche, conseguenze

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 41 (1966), n.5, p. 226-233.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_5_226_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Geofisica. — *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana.* — II. *La teoria di Somigliana; rettifiche, conseguenze.* Nota (*) del Socio PIETRO CALOI.

SUMMARY. — Somigliana's theory on the seismic wave propagation at the surface of a solid, elastic, isotropic, indefinite medium is briefly described. Some rectifications and extensions of the theory allow a new interpretation of the Rayleigh equation, which will theoretically explain certain systems of seismic waves, so far left without convincing physical justification.

1. Nel 1917 Carlo Somigliana [1] espose una teoria sulla propagazione delle onde sismiche alla superficie di un mezzo elastico, omogeneo isotropo indefinito, che conduce all'equazione di Rayleigh, senza aver fatta nessuna premessa restrittiva sulle velocità, come avviene nell'originale teoria di Rayleigh.

Il lavoro di Somigliana passò pressoché inosservato, perché — a quell'epoca le ricerche sismologiche non avevano ancora raggiunto posizioni tali da consentire una verifica della teoria (i tentativi compiuti, a questo riguardo dall'autore, risultarono infatti insostenibili [2]). Inoltre, la trattazione risultò non esente da mende, che ne falsarono l'indubbio valore. Richiamo qui di seguito le principali. Le equazioni (21) — p. 378, della Nota I —, dovevano essere scritte

$$\text{tang } \vartheta_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \text{tang } \vartheta_3 = \pm \sqrt{3}.$$

Pertanto solo una coppia costituita da un'onda incidente, trasversale o longitudinale, con la riflessa longitudinale o trasversale, potevano soddisfare le equazioni di condizione (15) — p. 376 —, contrariamente a quanto è sostenuto nel testo originale.

In calce a p. 19 della Nota III (6 gennaio 1918), Somigliana così si esprime: « Per un'inesattezza di calcolo nelle formule (23), (23'), (24) della Nota I e nelle corrispondenti della Nota II, figurano indebitamente le costanti α_1, α_2 . Esse devono porsi entrambe uguali all'unità; perciò anche il loro rapporto non può essere arbitrariamente fissato, come è detto alla fine della Nota I ». Senonché, in base alle posizioni fatte nella Nota I, e specialmente a p. 372, effettivamente le costanti α_1, α_2 sono del tutto arbitrarie.

Nell'espressione ad esponente di e — p. 475 della Nota II — va soppresso il 2.

Le parti reali delle (6) — p. 474, Nota II — non sono precisamente quelle riportate a p. 475 della stessa Nota: in queste ultime va mutato il segno di w_1 , e u_2 ; inoltre, i *seni* vanno sostituiti con i *coseni*, e viceversa.

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1966.

L'Autore, a cui esposi le obiezioni alla sua trattazione, rispose con lettera del 2 maggio 1942 (che ancora conservo) trovandole tutte giuste. Concludeva testualmente – a quell'epoca si usava anche il Voi –: « Vi rinnovo l'espressione della mia gratitudine pel lavoro di revisione che avete compiuto . . . ».

Ripresa negli ultimi anni, la teoria di Somigliana – con le modifiche accennate – mi parve rivestire notevole interesse, anche ai fini dei contributi che essa può portare alla conoscenza delle caratteristiche della crosta terrestre.

Ritengo pertanto opportuno riassumerla qui brevemente.

2. Riferiamo la superficie – supposta piana – della Terra ad una terna di assi ortogonali; coincida xy con la superficie terrestre e z sia rivolta positivamente verso lo Zenit.

Com'è noto, le onde di Rayleigh interessano il piano zx . Consideriamo un'onda piana comunque diretta nello spazio, sia

$$\alpha x + \gamma z = k, \quad k \text{ costante}$$

il suo piano d'onda.

Se d è la distanza del piano considerato dall'origine degli assi, si ha

$$d = \frac{\alpha x + \gamma z}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}.$$

Inoltre se p è la pulsazione dell'onda, v la sua velocità nello spazio, v_3 la velocità della sua traccia in superficie, è ancora

$$(1) \quad v = \frac{p}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \quad v_3 = \frac{p}{\alpha}.$$

Per cui, se e è l'angolo d'emergenza dell'onda, consegue

$$(2) \quad \sin e = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \quad \cos e = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}.$$

Consideriamo ora due onde piane, una longitudinale, l'altra trasversale; saranno rispettivamente contrassegnate dagli indici 1 e 2.

Siano v_1, v_2 le loro velocità di propagazione e e_1, e_2 i rispettivi angoli d'emergenza in superficie. Per le (1), (2) è

$$v_1 = (v_3)_1 \cos e_1, \quad v_2 = (v_3)_2 \cos e_2.$$

Affinché le velocità superficiali $(v_3)_1, (v_3)_2$ risultino uguali, dovrà essere

$$(3) \quad v_1 \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \gamma_2^2}} = v_2 \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \gamma_1^2}}.$$

Si possono quindi pensare infinite coppie di onde piane, una longitudinale e l'altra trasversale, caratterizzate da identiche velocità di propagazione superficiale.

Se φ e ψ sono due funzioni generiche di $\alpha x + \gamma z - pt$ – dove t significa il tempo – e se con u, w si indicano le componenti secondo l'asse x e l'asse z

rispettivamente, potremo scrivere, a rappresentazione della coppia di onde prescelte,

$$(4) \quad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 \varphi(\alpha_1 x + \gamma_1 z - p_1 t) & \mu_2 = \gamma_2 \psi(\alpha_2 x + \gamma_2 z - p_2 t) \\ w_1 = \gamma_1 \varphi(\alpha_1 x + \gamma_1 z - p_1 t) & w_2 = -\alpha_2 \psi(\alpha_2 x + \gamma_2 z - p_2 t). \end{cases}$$

Nella sovrapposizione delle due onde, le risultanti del movimento orizzontale e verticale in superficie possono scriversi

$$u = u_1 + u_2, \quad w = w_1 + w_2.$$

La propagazione in superficie di onde, che nascono dalla combinazione di un'onda longitudinale e di una trasversale, richiede si annullino per $z = 0$, le tensioni normale e tangenziale

$$(5) \quad \begin{cases} N_3 = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ T_2 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{cases}$$

dove λ, μ sono le costanti di Lamè e $\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$ è la dilatazione cubica. Posto

$$(6) \quad \zeta_1 = \alpha_1 x + \gamma_1 z - p_1 t, \quad \zeta_2 = \alpha_2 x + \gamma_2 z - p_2 t,$$

si ottiene

$$N_3 = [\lambda \alpha_1^2 + (\lambda + 2\mu) \gamma_1^2] \varphi'(\zeta_1) - 2\mu \alpha_2 \gamma_2 \psi'(\zeta_2)$$

$$T_2 = \mu [2\alpha_1 \gamma_1 \varphi'(\zeta_1) + (\gamma_2^2 - \alpha_2^2) \psi'(\zeta_2)],$$

in cui l'apice ' significa derivazione rispetto a ζ_1 o ζ_2 rispettivamente.

La nuova onda, che nasce in superficie dalla sovrapposizione delle onde costituenti la coppia iniziale, esige l'unificazione delle rispettive funzioni rappresentative: φ e ψ dovranno quindi confluire in una stessa funzione.

Pertanto, fatto

$$\varphi'(\zeta_1) = A \Phi' \left(\frac{\zeta_1}{\alpha_1} \right)$$

$$\psi'(\zeta_2) = B \Phi' \left(\frac{\zeta_2}{\alpha_2} \right),$$

e ricordando la seconda delle (1) e le (6), avremo

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi'(\zeta_1) = A \Phi'(x - v_3 t) \\ \psi'(\zeta_2) = B \Phi'(x - v_3 t), \end{cases}$$

dovendo essere, in superficie

$$(v_3)_1 = (v_3)_2 = v_3,$$

il che consente altresì l'unificazione degli argomenti della Φ' .

L'annullarsi della T_2 conduce alla condizione

$$(8) \quad B = A \frac{2\alpha_1 \gamma_1}{\alpha_2^2 - \gamma_2^2},$$

sicch , per $N_3 = 0$, si ottiene

$$(9) \quad [\lambda \alpha_1^2 + (\lambda + 2\mu) \gamma_1^2] (\alpha_2^2 - \gamma_2^2) = 4\mu \alpha_1 \gamma_1 \alpha_2 \gamma_2,$$

che le (2) consentono di trasformare nell'equazione

$$(10) \quad [\lambda + (\lambda + 2\mu) \operatorname{tang}^2 e_1] (1 - \operatorname{tang}^2 e_2) = 4\mu \operatorname{tang} e_1, \operatorname{tang} e_2.$$

Poich 

$$(11) \quad (v_3)_1^2 = v_1^2 \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2} \right) \quad ; \quad (v_3)_2^2 = v_2^2 \left(1 + \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2^2} \right)$$

e, in superficie, $(v_3)_1 = (v_3)_2 = v_3$, dalla (9) consegue

$$(12) \quad \left(2 - \frac{v_3^2}{v_2^2} \right)^4 = 16 \left(1 - \frac{v_3^2}{v_1^2} \right) \left(1 - \frac{v_3^2}{v_2^2} \right).$$

È questa la notissima equazione di Rayleigh (infatti, essa coincide con la (23) della Nota precedente [3]).

L'eccezionale interesse di questa teoria non sta tanto nel raggiungimento di una formula per la velocit  v_3 formalmente identica a quella raggiunta da Rayleigh, quanto nel fatto che le soluzioni della (12) non sono condizionate da limiti imposti da confronti di velocit , bens  dalla necessit  di soddisfare la (10).

Possiamo quindi dire che due onde, una longitudinale e l'altra trasversale - ciascuna con il proprio periodo - interferendo in quel punto della superficie dove raggiungono la stessa velocit  v_3 , danno luogo, se   rispettata (10), a onde superficiali, *periodiche o non periodiche*. Anche sotto questo punto di vista, la teoria di Somigliana appare molto pi  generale di quella originaria di Rayleigh.

Posto $\chi = \frac{v_3^2}{v_2^2}$, l'equazione di Rayleigh si pu  scrivere

$$(13) \quad \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \chi^3 - 8 \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \chi^2 + 8 \left(3 \frac{\lambda}{\mu} + 4 \right) \chi - 16 \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) = 0.$$

Si vede subito che questa equazione ammette *sempre* una radice minore dell'unit . Ed   noto che *solo* in corrispondenza di detta radice, nella teoria di Rayleigh, la (12) ha significato fisico, in forza della condizione $v_3 < v_2$.

Nella teoria brevemente esposta tale limitazione non sussiste: esiste invece una diversa condizione da soddisfare, quella espressa dalla (10). Ci  significa che *tutte* le radici reali della (13) possono avere significato fisico.

Facciamo un esempio. La (13), per il rapporto di Poisson $\sigma = 1/4$, e quindi per $\lambda = \mu$, diviene

$$3 \chi^3 - 24 \chi^2 + 56 \chi - 32 = 0.$$

Le radici, tutte reali, sono

$$\chi_{III} = 4 \quad , \quad \chi_{II} = 3,1547; \quad \chi_I = 0,8453.$$

Per quanto concerne la χ_I , si vede subito che da essa conseguono valori *negativi* per

$$\operatorname{tang}^2 e_1 = \frac{v_3^2}{v_1^2} - 1 \quad , \quad \operatorname{tang}^2 e_2 = \frac{v_3^2}{v_2^2} - 1.$$

Le onde, longitudinale e trasversale, da cui, in superficie, dovrebbero trar origine le onde di Rayleigh, emergono con angoli immaginari.

Dalla χ_{III} si deduce

$$v_3 = 2 v_2 ;$$

si ha inoltre

$$\operatorname{tang}^2 e_1 = \frac{v_3^2}{v_1^2} - 1 = \frac{v_3^2}{v_2^2} \cdot \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 = \frac{1}{3} ;$$

$$\operatorname{tang}^2 e_2 = \frac{v_3^2}{v_2^2} - 1 = 3.$$

Ne viene

$$(14) \quad \operatorname{tang} e_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \operatorname{tang} e_2 = \mp \sqrt{3}.$$

Per quanto riguarda i segni, la (10) infatti è soddisfatta dagli accoppiamenti + con —, o — con +; gli accoppiamenti con segni uguali conducono all'assurdo. Questa è una delle principali sviste sfuggite a Somigliana.

Poiché conclusioni analoghe valgono per qualunque valore di σ al quale corrispondono tre radici reali per la (12), se ne deduce che, nella teoria di Somigliana le onde di Rayleigh propriamente dette *non hanno luogo* (i loro piani d'onda infatti degenerano in sistemi di rette parallele). Assumono invece un significato notevole le radici reali maggiori dell'unità: le eventuali onde corrispondenti alle (14) nascono dall'accoppiamento di un'onda *longitudinale* (trasversale) *incidente* con la corrispondente onda *trasversale* (longitudinale) *riflessa*.

Alla (14) corrispondono le coppie di angoli di emergenza

$$e_1 = \pm 30^\circ \quad ; \quad e_2 = \mp 60^\circ;$$

oppure, indicando con i l'angolo d'incidenza, le coppie di angoli d'incidenza

$$i_1 = \pm 60^\circ \quad ; \quad i_2 = \mp 30^\circ.$$

Alla radice $\chi_{II} = 3,1547$, corrispondono analogamente gli angoli

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \pm 12^\circ 47' \\ e_2 = \mp 55^\circ 44' \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 = \pm 77^\circ 12' \\ i_2 = \mp 34^\circ 16'. \end{array} \right.$$

Pertanto, quando — per $\sigma = 1/4$ — onde longitudinali (trasversali) incidono sotto angoli di 60° (30°) oppure $77^\circ 13'$ ($34^\circ 16'$), se ad esse corrispon-

dono onde riflesse trasversali (longitudinali) con angoli di riflessione pari a 30° (60°) oppure $34^\circ 16'$ ($77^\circ 13'$), potranno generarsi in superficie onde che chiameremo di *Somigliana*. Naturalmente, per la loro effettiva insorgenza dovranno essere contemporaneamente soddisfatte le leggi della riflessione di onde elastiche contro una superficie di discontinuità. In particolare, si dovrà avere

$$\frac{\sin z_2}{\sin z_1} = \frac{v_2}{v_1},$$

ciò che nei casi sopra riportati (corrispondenti ai valori di χ_{III} , χ_{II}) effettivamente si verifica, come è facile provare.

Non intendo qui esporre l'intera teoria di Somigliana (che presenta, d'altronde, altri lati interessanti), cosa che mi riservo di fare in altra sede.

Mi è bastato richiamare l'attenzione sul ruolo singolare che l'equazione di Rayleigh viene ad assumere in detta teoria; e sulle interpretazioni delle sue radici maggiori dell'unità nel campo delle indagini sulla natura della crosta terrestre. È appunto su di esse che io intendo soffermarmi.

Innanzitutto, ha interesse stabilire in quale intervallo dei possibili valori di σ , l'equazione di Rayleigh ha tutte e tre le radici reali. A questo riguardo, la Tabella I riporta i valori delle radici dell'equazione di Rayleigh, corrispondenti a valori di σ variabili fra $1/2$ e 0, cioè fra l'incompressibilità e la massima rigidità.

TABELLA I.

σ	0,0	0,1	0,2	0,25	0,26	0,26305
χ_I	0,76393	0,79764	0,82992	0,8453	0,8483	0,84922
χ_{II}	2,0000	2,2504	2,6873	3,1547	3,3702	3,5754
χ_{III}	5,2360	4,9519	4,4846	4	3,7813	
$\frac{(v_3)_I}{v_2}$	0,87403	0,8931	0,9110	0,9194	0,9210	0,92153
$\frac{(v_3)_{II}}{v_2}$	1,4142	1,500	1,639	1,7761	1,8358	1,89085
$\frac{(v_3)_{III}}{v_2}$	2,2882	2,225	2,117	2	1,9445	

Per valori di σ compresi fra 0,26305 e 0,5, soltanto la radice minore della unità è reale; le altre sono complesse.

Pertanto, onde di Somigliana possono verificarsi solo per mezzi aventi un rapporto di Poisson non superiore a 0,263, cioè per mezzi aventi rigidità sufficientemente elevata.

TABELLA II.

Angoli d'incidenza (+) e riflessione (—) per onde longitudinali (1) e trasversali (2), efficaci per la formazione di onde di Somigliana.

σ	Radici	i_1	i_2
0,0	$\chi_{II} = 2,0000$	$\pm 90^\circ$	$\mp 45^\circ$
	$\chi_{III} = 5,2360$	$\pm 38^\circ 10'$	$\mp 22^\circ 55'$
0,25	$\chi_{II} = 3,1547$	$\pm 77^\circ 13'$	$\mp 34^\circ 16'$
	$\chi_{III} = 4,0000$	$\pm 60^\circ$	$\mp 30^\circ$
0,26305	$\chi_{II} = \chi_{III} = 3,5754$	$\pm 68^\circ 51'$	$\mp 31^\circ 56'$

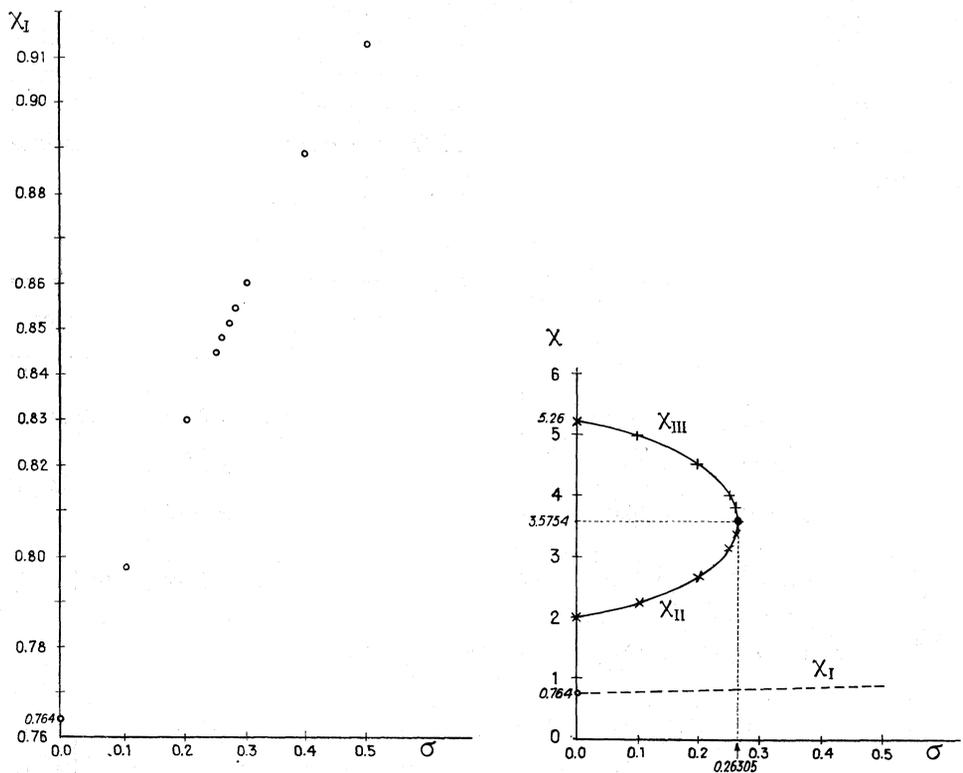


Fig. 1. - Le radici reali dell'equazione di Rayleigh per σ variabile fra 0 e 1/2.

La Tabella II dà i valori delle coppie i_1, i_2 , alle quali possono corrispondere onde di Somigliana, per i casi $\sigma = 0,0; = 0,25; = 0,26305$. La fig. 1 riproduce i valori reali delle radici dell'equazione di Rayleigh, per σ variabile fra 0 e 1/2.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. SOMIGLIANA, *Sulla propagazione delle onde sismiche*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei», *Nota I*: vol. XXVI, ser. 5^a, fasc. 7 (1917). *Nota II*: vol. XXVI, ser. 5^a, fasc. 9 (1917). *Nota III*: vol. XXVII, ser. 5^a, fasc. 1 (1918).
- [2] P. CALOI, *Due nuovi tipi di onde sismiche alla luce di una teoria di Somigliana*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei», Classe Scienze fis., mat. e nat., vol. XXIII, ser. 6^a, fasc. 7 (1936).
- [3] P. CALOI, *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. I: La teoria delle onde di Rayleigh*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei», Classe Scienze fis., mat. e nat., vol. XLI, ser. VIII, fasc. 1-2 Ferie (1966).