Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Beniamino Segre

Coppie di forme binarie a jacobiano definito, e forme antidefinite o massimali in campo reale. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.5, p. 215–225.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_5_215_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 novembre 1966

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Coppie di forme binarie a jacobiano definito, e forme antidefinite o massimali in campo reale.* Nota I [(*)] del Socio BENIAMINO SEGRE.

SUMMARY. — The content of the present paper (relative also to Note II, due to appear in the next issue of these « Rendiconti ») is explained in detail in § I where, besides, historical hints on some related topics are to be found. After a number of introductory remarks (§ II; cf. n. 4 for the definitions of some suitable new terms), § III deals at length with the Jacobian of an ∞^1 linear series of sets of points on a line, considered over the real field, in connection especially with the " separation " property of two of those sets.

I. – INTRODUZIONE.

1. Il problema di determinare il numero degli zeri reali di una forma binaria a coefficienti reali venne da molto tempo brillantemente risolto dallo Sturm [« Mém. Acad. Roy. Sc. Inst. France », *6*, 273–318 (1835)] coll'introduzione della successione che oggi porta il suo nome. Restava tuttavia la questione – giudicata allora molto difficile [(1)] – di esplicitare tale successione in funzione dei coefficienti della forma; questione che venne poi sviscerata da Sylvester [7]–[14] e da Cayley [1]–[4] in tutto un complesso di magistrali lavori. Ad essa ebbi ad arrecare recentemente contributi semplificatori in tre Note lincee [5], prive però di Bibliografia, nella terza delle

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1966.

(1) Cfr. l'ultima nota a pié di pagina in [7] ed il capoverso finale in [8].

quali perseguii inoltre un nuovo punto di vista nel caso di particolare rilievo in cui le radici reali abbiano ad essere tutte semplici ed in numero eguale al grado della forma [2].

Detto punto di vista viene qui ripreso lasciando cadere l'ipotesi restrittiva della semplicità delle radici. Si giunge così ad estensioni e approfondimenti dei risultati conseguiti in quella Nota III, riguardanti fra l'altro le serie lineari ∞^1 reali a jacobiano definito, gli hessiani delle forme binarie in campo reale e la « separazione » fra forme siffatte. I principali fra essi vengono riassunti dai seguenti otto enunciati (rispettivamente stabiliti nei nn. 6, 7, 8, 9, 13, 15, 16, 19), dove la terminologia è quella specificata poi nel n. 4 ed include fra l'altro gli attributi di « antidefinito » e di « massimale » che compaiono nel titolo [3].

TEOREMA I. – *Se una serie lineare γ_n^1 reale su di una retta ha il proprio gruppo jacobiano definito, allora due gruppi distinti qualsiansi di quella si separano, talché ogni gruppo della γ_n^1 contiene uno stesso numero n^* di punti reali (necessariamente semplici per esso), dove $1 \leq n^* \leq n$.*

TEOREMA II. – *Se due gruppi reali di punti di una retta sono massimali e si separano, il loro jacobiano risulta definito, ond'essi determinano una γ_n^1 i cui gruppi a due a due si separano e sono quindi tutti massimali.*

TEOREMA III. – *Se i gruppi reali di una γ_n^1 su di una retta sono tutti antidefiniti, i gruppi che si ottengono da essi sopprimendo il gruppo base di γ_n^1 sono tutti massimali e a due a due si separano. Il gruppo jacobiano di γ_n^1 si ha allora coll'aggregare al doppio del gruppo base un certo gruppo definito, talché risulta esso stesso definito (se non vi sono punti base) oppure semidefinito.*

TEOREMA IV. – *Affinché un gruppo f reale d'ordine $n \geq 3$ di una retta risulti antidefinito, occorre e basta che – fissato ad arbitrio una volta per tutte un intero i soddisfacente alle $1 \leq i \leq n-2$ – ogni gruppo polare (semplice o misto) di i punti reali della retta rispetto ad f sia antidefinito od indeterminato. La seconda eventualità rimane esclusa se nessuno di quegli i punti appartiene ad f, nel qual caso, anzi, se il gruppo antidefinito f non è ipersingolare neppure il relativo gruppo polare lo è.*

TEOREMA V. – *Se un gruppo f reale d'ordine $n \geq 3$ di una retta è tale che l'hessiano H di f non contenga punti reali distinti dagli eventuali punti multipli reali di f, ne rimane determinato un intero m^* soddisfacente alle $1 \leq m^* \leq n-1$ per guisa che i gruppi che si hanno dagli f_O primi polari rispetto ad f dei singoli punti O reali della retta, col prescindere dai punti che cadono nei suddetti punti multipli di f, constano ciascuno in campo reale di esattamente m^* punti distinti ed inoltre a due a due si separano.*

(2) Un criterio di tutt'altro genere, relativo a questo caso, era stato precedentemente assegnato da A. BORCHARDT, « Journ. de Math. », *12*, 50–67 (1847).

(3) Tale terminologia, semplice e naturale ma non di uso corrente, ci sembra bastantemente giustificata dall'impiego che qui ne facciamo. Essa può venire raffrontata con quella d'altro tipo, notevolmente fantasiosa e ramificata, indicata nel « glossario » posto alla fine di [11].

Se $m^* \geq 2$, *ad* f *appartengono allora precisamente* $m^* + 1$ *punti reali distinti (semplici o multipli). Ne discende che se – com'è ben possibile (cfr. il n. 12) – le forme* f *ed* H *sono entrambe definite, dev'essere* $m^* = 1$ *(talché la corrispondenza che associa ad ogni* O *i punti del relativo* f_O *risulta ora biunivoca senza eccezione in campo reale). Risulta invece impossibile che simultaneamente* f *contenga un sol punto reale ed* H *sia definito.*

TEOREMA VI. – *Se* f, g *denotano due gruppi massimali di punti d'ordine* $n \geq 2$ *di una retta che si separino, e se* $O_1, O_2, \cdots, O_k$ *sono* k *punti reali qualsiansi – eventualmente ripetuti – della retta* $(1 \leq k \leq n - 1)$, *anche i gruppi polari* $f_{O_1 O_2 \cdots O_k}$, $g_{O_1 O_2 \cdots O_k}$ *sono massimali e si separano.*

TEOREMA VII. – *Affinché una forma binaria* f *di grado* $n \geq 3$ *sia massimale (e cioè ammetta* n *zeri semplici reali), occorre e basta che ciascuna delle forme hessiane* H_{pq} $(p \geq 0, q \geq 0, p + q \leq n - 3)$ *– di cui al n. 3 – risulti definita negativa.*

TEOREMA VIII. – *Condizione necessaria e sufficiente per la massimalità di una forma quintica binaria in campo reale, è ch'essa abbia discriminante positivo e che la sua hessiana risulti una forma definita.*

II. – PRELIMINARI.

2. Stabiliamo anzitutto la seguente proposizione (certamente nota in casi speciali), che ci verrà poi utile nell'ipotesi che la si riferisca a coppie di $r = 2$ funzioni razionali intere.

Se le f_i, g_i $(i = 1, 2, \cdots, r;\ r \geq 2)$ *designano due* r*-ple di funzioni omogenee di classe* C^1 *rispettivamente dei gradi* $m \neq 0$ *ed* n *in* r *variabili* x_j $(j = 1, 2, \cdots, r)$, *e se fra esse intercedono le relazioni*

$$g_i = h f_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, r) \tag{1}$$

ove h *denoti una funzione (omogenea di grado* $n - m$*) nelle stesse variabili, allora gli jacobiani* I, J *delle* f, g *rispetto alle* x *risultano legati dalla*

$$J = \frac{n}{m} h^r I.$$

Derivando ambo i membri della (1) rispetto alla variabile x_j, e designando la derivazione rispetto ad x_j coll'apposizione dell'indice j, si ha tosto infatti

$$g_{ij} = h f_{ij} + h_j f_i.$$

Risulta pertanto (usando notazioni evidenti per rappresentare determinanti in poco spazio):

$$J = |g_{ij}|_{i,j=1,\cdots,r} = h^r |f_{ij}|_{i,j=1,\cdots,r} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} h^{r-1} |f_{i1} \cdots f_{i,j-1}, h_j f_i, f_{i,j+1} \cdots f_{ir}|_{i=1,\cdots,r}.$$

Se ora applichiamo prima ad f_i e poi ad h il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, deduciamo successivamente

$$J = h^r I + \sum_{j=1}^{r} \frac{h^{r-1} h_j}{m} \left| f_{i_1} \cdots f_{i,j-1}, \sum_{l=1}^{r} f_{il} x_l, f_{i,j+1} \cdots f_{ir} \right|_{i=1,\dots,r} =$$

$$= h^r I + \frac{h^{r-1}}{m} \sum_{j=1}^{r} h_j \left| f_{i} \cdots f_{i,j-1}, f_{ij} x_j, f_{i,j+1} \cdots f_{ir} \right|_{i=1,\dots,r} =$$

$$= h^r I + \frac{h^{r-1}}{m} \sum_{j=1}^{r} h_j x_j I = \left(1 + \frac{n-m}{m}\right) h^r I = \frac{n}{m} h^r I ,$$

onde l'asserto.

Rammentando che l'hessiano di una funzione non è ovviamente altro che lo jacobiano delle sue derivate prime, e poiché dalla $g = f^s$ seguono le $g_i = s f^{s-1} f_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, analoghe alle (1) ma dove l'indice i denota ora derivazione rispetto ad x_i, la proposizione testé stabilita porge senz'altro che:

Se f ed s designano una funzione omogenea di classe C^2 in r variabili avente grado $n \neq 1$ ed una costante qualsiansi, fra gli hessiani H_f ed H_g rispettivamente di f e $g = f^s$ intercede la relazione

$$H_g = s^r \frac{sn-1}{n-1} f^{r(s-1)} H_f .$$

3. In seguito, il nostro studio verterà sempre soltanto su forme algebriche binarie a coefficienti reali. Una forma f siffatta, supposta di grado $n \geq 1$ nelle variabili x_1, x_2, verrà quindi espressa dalla

$$f = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x_1^{n-i} x_2^{i}$$

colle a_i reali. Posto per abbreviare

$$f_{pq} = \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x_1^p \partial x_2^q}, \qquad m = n - p - q \qquad (p \geq 0, q \geq 0, 0 \leq m \leq n),$$

talché $f_{00} = f$, risulta

$$f_{pq} = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a_{q+i} x_1^{m-i} x_2^{i} ;$$

pertanto – sotto la condizione $p + q \leq n - 2$, ossia $m \geq 2$, la quale implica $n \geq 2$ – l'hessiano di f_{pq} (che denoteremo con H_{pq}, sicché $H_{00} = H = H_f$ sarà l'hessiano di f) è dato da

$$H_{pq} = f_{p+2,q} f_{p,q+2} - f_{p+1,q+1}^2 .$$

Più particolarmente, se $m = 2$ ossia $p + q = n - 2$, si ha dunque

$$H_{n-q-2,q} = a_q a_{q+2} - a_{q+1}^2 ; \tag{2}$$

mentre se $m > 2$, ossia $p + q < n - 2$, ed inoltre naturalmente $p \geq 0$, $q \geq 0$ (il che implica $n \geq 3$), risulta

$$(3) \qquad H_{pq} = \frac{1}{(m-2)!}\left(H_{n-q-2,q}\, x_1^{2m-4} + \cdots + H_{p,n-p-2}\, x_2^{2m-4}\right),$$

dove i puntini stanno per termini di grado $2m - 4$ nelle x in ciascuno dei quali compare $x_1 x_2$ a fattore.

4. Se le a non sono tutte nulle, alla forma f si può associare l'e q u a z i o n e $f = 0$ che, introdotta la nuova variabile $x = x_1/x_2$, diventa

$$(4) \qquad f(x) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

Sulla retta (reale) in cui x_1, x_2 siano coordinate proiettive omogenee, eppertanto x sia coordinata proiettiva non omogenea di punto, la (4) definisce un g r u p p o (r e a l e) d i p u n t i che denoteremo ancora con f e di cui n verrà detto l'*ordine*. Se fra tali punti ve ne sono n' (≥ 0) di reali e distinti, assumeremo $n^* = 0$ se $n' = 0$; mentre se $n' > 0$, designate con $k_1, k_2, \cdots, k_{n'}$ le molteplicità di detti punti, porremo

$$n^* = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n'},$$

talché n^* denoterà il numero dei punti reali f contati ciascuno con la rispettiva molteplicità. È chiaro che

$$0 \leq n' \leq n^* \leq n, \qquad n^* \equiv n \pmod 2,$$

in quanto $(n - n^*)/2$ uguaglia il numero delle coppie di radici complesse coniugate di f (contate con le rispettive molteplicità), e che $n' = 0$ e q u i v a l e alla $n^* = 0$.

Se $n' = n^* = 0$, ossia se f è p r i v a di zeri in campo reale, la forma f risulta *definita*, e viceversa. Diremo allora che tale è altresì il corrispondente gruppo f; useremo inoltre in senso analogo anche per i gruppi l'attributo di *semidefinito*.

Sia la forma che il gruppo f verranno detti *singolari in campo reale* se taluna delle k è ≥ 2, cioè se $n^* > n'$. Converremo inoltre di dire ch'essi sono *antidefiniti* se $n^* = n$ (ossia se t u t t i gli zeri di f sono reali), e ch'essi sono *massimali* se $n' = n$ (ciò che implica $n^* = n$ e val quanto supporre che il numero di zeri reali e distinti di f raggiunga il m a s s i m o, dato dall'ordine n del gruppo). Un gruppo ridotto ad un sol punto O (necessariamente reale) da contarsi $k = n$ volte, oppure relativamente al quale tutti i coefficienti a vengano ad annullarsi, sarà detto rispettivamente – per ovvi motivi – *ipersingolare* (di c e n t r o O) od *indeterminato*.

Se f – supposto non avente uno zero all'infinito (tale dunque che $a_0 \neq 0$) – è inoltre *non singolare* in senso assoluto (e cioè privo di radici multiple in campo complesso), ossia se f ha discriminante $D \neq 0$, l'espressione di D in funzione delle radici della (4) mostra subito che *è* $D > 0$ *o* $D < 0$ secondoché il numero $(n - n^*)/2$ delle coppie di radici complesse coniugate risulta pari o dispari, e cioè *a seconda che* $n^* \equiv n \ (mod\ 4)$ *od* $n^* \equiv n - 2 \ (mod\ 4)$ (4).

Si dirà che due gruppi f, g di punti di una retta (proiettiva reale) *si separano*, quando siano simultaneamente soddisfatte le seguenti condizioni:

(i) f e g abbiano lo stesso carattere n e non siano né l'uno né l'altro indeterminati;

(ii) f e g abbiano gli stessi caratteri n', n^*, e questi soddisfino alla $n' = n^*$;

(iii) se $n^* = 0$, i gruppi f e g siano distinti (ossia le forme corrispondenti né coincidano né, più generalmente, differiscano soltanto per un fattore costante); se $n^* = 1$, l'unico punto reale di f sia distinto dall'unico punto reale di g (il che equivale alla non proporzionalità dei coefficienti delle due forme soltanto per $n = 1$); se $n^* \geq 2$, gli n^* punti reali di f spezzano la retta in altrettanti «segmenti» (intesi in senso proiettivo), ciascuno dei quali contenga all'interno uno (ed un solo) punto reale di g.

È chiaro che la relazione di separazione fra due gruppi di punti – testé definita – ha carattere proiettivo (in campo reale) e risulta scambievole rispetto a quelli. Essa implica la non singolarità in campo reale di ciascuno dei due gruppi, la non coincidenza fra tali gruppi e la non esistenza di punti reali ad essi comuni. Inoltre, un gruppo che separi un gruppo massimale di punti è di conseguenza esso pure massimale.

OSSERVAZIONE. – *È ovvio che un gruppo dedotto comunque per piccola variazione da un gruppo definito è pur esso definito.* Un gruppo di punti singolare in campo reale può poi manifestamente ottenersi come limite di un variabile gruppo di punti non singolare in campo reale, soggetto alla condizione che questo debba sempre avere i suoi stessi caratteri n ed n^*; in particolare, *ogni gruppo antidefinito può ottenersi come limite di un gruppo massimale.* La seconda parte dell'affermazione contenuta nel precedente periodo (ma non la prima) ammette un'inversa: *un gruppo di punti non indeterminato, ottenuto in maniera qualsiasi come limite di un gruppo massimale, risulta necessariamente antidefinito.* Ulteriori precisazioni in argomento verranno ottenute nel n. 8.

5. Sia f un gruppo di punti reale (non indeterminato) d'ordine $n \geq 2$ di una retta, per il quale conserviamo le notazioni del n. 4. Se f è singolare in campo reale, designeremo con P un suo generico punto multiplo reale, di molteplicità $k \geq 2$, e con φ il gruppo d'ordine

$$\sum_{P} (k - 1) = \sum_{i=1}^{n'} (k_i - 1) = n^* - n'$$

formato da siffatti punti P presi rispettivamente con molteplicità $k - 1$.

(4) Per un'altra meno immediata dimostrazione e per estensioni di questo risultato, ved. [5], Nota I, § 3, cor. 2, ed inoltre [6], §§ 1, 4.

Valgono allora le seguenti proprietà, tutte sostanzialmente note e di facile dimostrazione.

a) *Se* O *denota un qualunque punto reale della retta, il gruppo* f_O (*d'ordine* $n-1$) *primo polare di* O *rispetto ad* f *risulta indeterminato se, e soltanto se,* f *è ipersingolare di centro* O, *nel qual caso l'hessiano* H_f *di* f *è pure di conseguenza indeterminato.*

b) *Se* f *non è ipersingolare, il gruppo* f_O *descrive al variare di* O *una serie lineare* ∞^1, *la quale – nel campo reale – ammette precisamente il suddetto gruppo* φ *come gruppo base* (*ed è quindi privo di punti base reali nel caso, e nel caso soltanto, in cui* f *sia non singolare in campo reale*). *È manifesto che la serie lineare* γ_m^1 *residua, costituita dai gruppi ottenuti sopprimendo* φ *dai singoli* f_O, *ha l'ordine*

$$m = (n-1) - (n^* - n') = n + n' - n^* - 1$$

ed è priva di punti base in campo reale; si ha inoltre che nessun suo gruppo ammette un punto multiplo in un punto reale di f.

c) *Se* f *è antidefinito e non ipersingolare, ciascun gruppo della* γ_m^1 *introdotta in* b) *è massimale* (*sicché in particolare ogni* f_O *risulta antidefinito, ed anzi massimale, qualora si supponga* f *massimale*).

La c) potrebbe venire precisata mediante una proposizione estendente il lemma 2 di [5], Nota III, § 8, lemma che include la stessa c) limitata al caso particolare in cui f sia massimale; tale proposizione (che per brevità non stiamo ad enunciare) risulta agevolmente deducibile da quel lemma con un passaggio al limite, poggiando sull'*Osservazione* del n. 4. La c) implica poi senz'altro che γ_m^1 – nelle ipotesi ivi ammesse – debba avere un gruppo jacobiano definito; quando si tenga anche conto della prima proposizione del n. 2, se ne inferisce la seguente estensione del cor. 4 di [5], Nota III, § 8:

d) *L'hessiano di una forma* f *binaria reale, antidefinita e non ipersingolare, è dato dal prodotto del quadrato della relativa* φ (*di cui al principio del presente n. 5*) *per una forma definita, ed è quindi semidefinito* (*o, in particolare, definito*) (5).

Avuto riguardo al n. 4, si ha infine subito che:

e) *Detto* D *il discriminante di una forma* f *binaria reale di grado* n, *se* f *è antidefinita risulta* $D \geq 0$. *Viceversa, se questa limitazione sussiste ed è* $n = 2$ *od* $n = 3$ (*ma non necessariamente per* $n \geq 4$) *la forma* f *risulta antidefinita; nella limitazione per* D *vale allora il segno di uguaglianza se, e soltanto se,* f *è singolare in campo reale* (*per* $n = 2$, *ciò val quanto dire: se* f *è ipersingolare*).

(5) Relativamente all'hessiano di una forma binaria su di un campo a caratteristica, cfr. [6], § 2.

III. – Serie lineari ∞^1 reali a jacobiano definito.

6. Quanto osservato dopo la c) del n. 5, suggerisce il problema di *studiare le γ_n^1 reali di una retta (con $n \geq 2$) a gruppo jacobiano definito.*

Sia

$$\lambda_1 f(x_1, x_2) + \lambda_2 g(x_1, x_2) = 0$$

l'equazione di una siffatta γ_n^1, dove f e g denotino due forme binarie di grado n, a coefficienti reali costituenti due successioni fra loro non proporzionali. Introdotta sia in γ_n^1 che sulla retta una coordinata proiettiva non omogenea, rispettivamente data da $\lambda = -\lambda_1/\lambda_2$, $x = x_1/x_2$, tale equazione – per ogni x che non sia uno zero di g – può venir scritta sotto la forma

$$\lambda = f(x) \,/\, g(x) \tag{5}$$

dove $f(x)$, $g(x)$ hanno ovvi significati in relazione alle precedenti f, g (cfr. il n. 4). Per ipotesi, e previo un eventuale scambio di x_1 ed x_2, si ha che la forma binaria

$$\mathrm{J}(x_1, x_2) = \partial(f, g) \,/\, \partial(x_1, x_2)$$

risulta d e f i n i t a p o s i t i v a, il che intanto implica che f, g non abbiano alcun zero reale in comune e che ogni loro zero reale risulti semplice. Dalla (5) si deduce inoltre con facile calcolo:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\mathrm{J}(x)}{n\,[g(x)]^2}\,. \tag{6}$$

Per un λ reale od ∞ fissato, la (5) rappresenta un gruppo della data γ_n^1, i gruppi f e g ottenendosi rispettivamente per $\lambda = 0$ e per $\lambda = \infty$. In altri termini, la funzione λ della x definita dalla (5) fornisce il valore di λ che compete al gruppo della γ_n^1 che contiene il punto x; e, in forza della (6) e dell'ipotesi $\mathrm{J} > 0$, tale funzione risulta in ogni punto c r e s c e n t e, eppertanto localmente invertibile dappertutto.

Detto n^* il numero degli zeri reali di f (tutti necessariamente semplici in forza della $\mathrm{J} > 0$), supponiamo dapprima $n^* \geq 2$ e designamo tali zeri con $x', x'', \cdots, x^{(n^*)}$, ove

$$x' < x'' < \cdots < x^{(n^*)},$$

non essendo naturalmente escluso che $x^{(n^*)}$ possa essere ∞. Quando λ – partendo dal valore 0 – cresce con continuità indefinitamente, le radici x della (5) che inizialmente assumono i valori $x', x'', \cdots, x^{(n^*)}$ variano con continuità sempre crescendo (e restando in un intorno destro di $-\infty$ nel caso del valore iniziale ∞), senza mai raggiungere uno qualsiasi dei suddetti valori; esse quindi si conservano rispettivamente i n t e r n e agli n^* « segmenti » di retta

$$x' < x < x'', \qquad x'' < x < x''', \qquad \cdots, \qquad x > x^{(n^*)} \text{ od } x < x',$$

eppertanto rimangono sempre distinte fra loro. Al limite, per $\lambda \to +\infty$, si ottengono così – all'interno di tali segmenti – n^* zeri d i s t i n t i di g. Detto n_1^* il numero complessivo degli zeri reali di g, risulta dunque $n_1^* \geq n^*$.

Ma è lecito scambiare in ciò che precede f e g, il che fornisce $n^* \geq n_1^*$. Risulta dunque $n^* = n_1^*$; di più, gli zeri reali di g separano di fatto quelli di f (secondo l'accezione del n. 4), in virtù di quanto sopra.

Alle stesse conclusioni si giunge similmente, ma in modo più semplice, per $n^* = 1$. Mentre resta poi escluso che possa risultare $n^* = 0$, in quanto f è un qualsiasi gruppo reale di γ_n^1 e può quindi venire astretto a contenere un fissato punto reale della retta.

Abbiamo così stabilito il teor. I (enunciato al n. 1). Da esso si ricava come corollario immediato che:

Lo jacobiano di due forme binarie dello stesso grado, una almeno delle quali sia definita, non può mai risultare definito.

Il teor. I ammette un inverso banale, nel senso che *una* γ_n^1 *i cui gruppi a due a due si separino ha lo jacobiano definito*; ed invero, in base al n. 4, ciascuno dei suoi gruppi risulta allora necessariamente non singolare in campo reale. Notiamo però che due gruppi che si separino e che abbiano i caratteri n, n^* soddisfacenti alla $n^* < n$ possono non avere lo jacobiano definito; così è sempre di fatto per quanto sopra se $n^* = 0$ (ossia se quei due gruppi sono definiti), ed è facile dare esempi in proposito anche nell'ipotesi $n^* \geq 1$. La situazione al riguardo è tuttavia nettamente diversa nel caso di due gruppi non singolari in campo reale per i quali risulti $n^* = n$, ossia qualora si tratti di gruppi massimali (n. 4), giusta quanto asserito dal teor. II (enunciato nel n. 1) che passiamo appunto a dimostrare.

7. Siano f, g due gruppi massimali d'ordine n di una retta che si separino. Tenuto conto del n. 4, il teor. II risulta evidente per $n = 1$. Potremo quindi limitarci al caso in cui sia $n \geq 2$, denotare con $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gli zeri (reali e distinti) di f e con $y_1, y_2, \cdots, y_n$ quelli di g, e supporre ch'essi rispettivamente si succedano negli ordini ora scritti in uno determinato dei due ordinamenti circolari della retta. Allora, dopo un eventuale scambio preliminare fra f e g, l'ipotesi di separazione di f, g verrà a tradursi in ciò che i punti

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{7}$$

risultino rispettivamente interni ai «segmenti»

$$(y_1, y_2),\ (y_2, y_3),\ \cdots,\ (y_n, y_1). \tag{8}$$

Ciò premesso, si consideri la funzione razionale λ della x definita dalla (5), dove f e g indicano i polinomi relativi ai gruppi omonimi; e si osservi che, in base alle ipotesi ammesse ed alla (6), tale funzione risulta invertibile in un intorno di ciascuno dei punti (7). Quando λ – partendo dal valore $\lambda = 0$ – si muove con continuità in un intorno I sufficientemente piccolo di quello (senza raggiungere l'∞), si ottiene in ciascuno dei suddetti n intorni una determinazione per x, funzione continua e reale di λ, i cui valori non uguagliano mai nessuna delle y_i; le n determinazioni suddette si mantengono quindi ordinatamente interne ai «segmenti» (8).

Ne consegue che, per un qualsiasi $\lambda \in \mathrm{I}$, gli n valori assunti da quelle determinazioni sono distinti e separano le y. Essi sono quindi tutte e sole le radici della corrispondente equazione (5), la quale ha grado n nella x e non è mai indeterminata. Gli n punti definiti da tali radici costituiscono dunque un gruppo massimale della γ_n^1 determinata da f e da g; questo può così venire sostituito ad f nella precedente argomentazione, ciò che permette di applicare quest'ultima iteratamente, facendo variare λ da zero a $+\infty$ e, del pari, da zero a $-\infty$.

Abbiamo in definitiva che ogni gruppo (reale) della suddetta γ_n^1 risulta massimale, eppertanto non singolare; sicché lo jacobiano di γ_n^1, ossia di f e g, è di conseguenza definito. Con ciò, ed ove si tenga pure conto del teor. I, il teor. II rimane compiutamente stabilito.

8. Allo scopo di dimostrare il teor. III (enunciando nel n. 1), proviamo anzitutto il seguente

LEMMA. – *Su di una curva algebrica reale*, C, *siano* γ_n^1 *una serie lineare reale ed* f *un gruppo* (*reale*) *di* γ_n^1 *contenente con molteplicità* $k > 1$ *un punto* O *semplice reale di* C *che non sia punto base di* γ_n^1. *Allora, in campo reale, tutti i gruppi* (*reali*) *di* γ_n^1 *appartenenti ad un intorno sufficientemente piccolo di* f – *ma distinti da* f – *hanno uno ed un sol punto reale nell'intorno di* O *su* C *se* k *è dispari, e questo punto risulta semplice per il relativo gruppo; mentre invece, se* k *è pari, il numero di siffatti punti distinti reali risulta* 0 *o* 2 *secondoché ci si riferisca ad un gruppo di* γ_n^1 *situato, nel primo dei due suddetti intorni, da una banda o dall'altra rispetto ad* f.

Detto g un qualunque gruppo reale di γ_n^1 distinto da f, ed introdotto nell'intorno di O su C un parametro x uniformizzante che si annulli in O, f e g saranno rispettivamente dati in quell'intorno da equazioni analitiche reali dei tipi

$$x^k + \cdots = 0 \quad , \quad 1 + \cdots = 0,$$

dove i puntini stanno per termini in x di gradi superiori a quelli che li precedono. Uno qualsiasi dei gruppi $f + \lambda g$ della γ_n^1 di cui al lemma sarà quindi rappresentato, in detto intorno, dall'equazione in x:

$$(x^k + \cdots) + \lambda(1 + \cdots) = 0 ,$$

relativa ad un valore reale non nullo di λ sufficientemente piccolo in valor assoluto. Poiché i punti richiesti corrispondono biunivocamente alle soluzioni x reali e prossime allo zero di quest'equazione, ne discende agevolmente quanto asserito dal lemma.

Una conseguenza immediata di quest'ultimo è che:

Se una γ_n^1 *reale sopra una retta contiene un gruppo* f *avente come multiplo un punto reale distinto dai punti base, v'è sempre* (*nell'intorno di* f) *in* γ_n^1 *qualche gruppo il cui carattere* n^* (*n.* 4) *risulta inferiore a quello di* f.

Con la terminologia del n. 4, e tenuto conto del teor. I, da qui tosto si trae che:

Se ogni gruppo reale di punti di una γ_n^1 *reale su di una retta è antidefinito* (*soddisfa cioè alla* $n^* = n$) *e la* γ_n^1 *è priva di punti base reali, ciascuno di* *quei gruppi risulta non singolare e quindi addirittura massimale. Nelle ipotesi ammesse, necessariamente lo jacobiano di* γ_n^1 *è definito ed i gruppi suddetti si separano a due a due.*

Se un'assegnata γ_n^1 reale ammette punti base reali, sopprimendo da essa tali punti (presi con le molteplicità rispettive) si ottiene una γ_m^1 manifestamente priva di punti base reali; ed è chiaro inoltre che ogni gruppo reale di γ_m^1 risulta antidefinito se, e soltanto se, l'analoga proprietà sussiste per γ_n^1, e che in tal caso γ_m^1 è di necessità priva di punti base anche in campo complesso. Basta quindi applicare l'ultimo enunciato a γ_m^1 (con la sostituzione dunque in esso di m ad n) e valersi della prima proposizione del n. 2, onde senz'altro pervenire relativamente a γ_n^1 al teor. III che si trattava di stabilire.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. CAYLEY, *Note sur les fonctions de M. Sturm*, « Journ. Math. Pures Appl. », *11*, 297–299 (1846) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 306–308.

[2] A. CAYLEY, *Nouvelles recherches sur les fonctions de M. Sturm*, « Journ. Math. Pures Appl. », *13*, 269–274 (1848) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 392–396.

[3] A. CAYLEY, *Tables on the Sturmian functions for equations of the second, third, fourth, and fifth degrees*, « Philos. Trans. », *147*, 733-736 (1857) = *Coll. Math. Papers*, t. II, 471–474.

[4] A. CAYLEY, *A discussion of the Sturmian constants for cubic and quartic equations*, « Quarterly Journ. », *4*, 7-12 (1861) = *Coll. Math. Papers*, t. IV, 473-477.

[5] B. SEGRE, *Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale* (Note I, II, III), « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) *29*, 155–161, 225–231, 465–471 (1960)₂.

[6] B. SEGRE, *Arithmetische Eigenschaften von Galois–Räumen, I*, « Math. Ann. », *154*, 195–256 (1964).

[7] J. J. SYLVESTER, *On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination* (Part I), « Philos. Mag. », *15*, 428–435 (1839) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 40–46.

[8] J. J. SYLVESTER, *A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree*, « Philos. Mag. », *16*, 132–135 (1840) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 54–57.

[9] J. J. SYLVESTER, *On the relations of Sturm's auxiliary functions to the roots of an algebraic equation*, « Plymouth British Ass. Rep. », 23–24 (1841) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 59–60.

[10] J. J. SYLVESTER, *On the expressions for the quotients which appear in the application of Sturm's method to the discovery of the real roots of an equation*, « Hull British Ass. Rep. », 1–3 (1853) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 396–398.

[11] J. J. SYLVESTER, *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure*, « Philos. Trans. », *143*, III, 407–548 (1853) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 429–586.

[12] J. J. SYLVESTER, *On a remarkable modification of Sturm's theorem*, « Philos. Mag. », *5*, 446–456 (1853) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 609–619.

[13] J. J. SYLVESTER, *Note on a remarkable modification of Sturm's theorem, and of a new rule for finding superior and inferior limits to the roots of an equation*, « Philos. Mag. », *6*, 14–20 (1853) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 620–626.

[14] J. J. SYLVESTER, *On the explicit values of Sturm's quotients*, « Philos. Mag. », *6*, 293–296 (1853) = *Coll. Math. Papers*, t. I, 637-640.