Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Aldo Bressan

## Sul teorema di Poynting e sul tensore energetico

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **41** (1966), n.3-4, p. 175–182.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_3-4_175_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

**Fisica matematica.** — *Sul teorema di Poynting e sul tensore energetico* (*). Nota (**) di ALDO BRESSAN, presentata dal Corrisp. D. GRAFFI.

SUMMARY. — The Author considers, among others, a certain interpretation of Poynting's theorem, useful for (also magnetic) piezo-elasticity. This interpretation is connected with a simple determination W of the density of electromagnetic energy and with the power spent by the field to change polarisations.

In connection with the above hinted interpretation two symmetric instances ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ and ${}_3E^*_{\alpha\beta}$ of the electromagnetic energy tensor $E_{\alpha\beta}$ are considered. By them the basic relativistic conservation equations (with inclusion of electromagnetism and thermodynamics) become very useful for dealing with piezo-elastic fluids and solids respectively.

The interest of ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ and ${}_3E^*_{\alpha\beta}$ will be strengthened by certain uniqueness properties of $E_{\alpha\beta}$ to appear in a future paper.

1. INTRODUZIONE. – In vari testi di elettromagnetismo – per esempio [14] –, riferendosi dapprima al caso stazionario e di corpi fissi, si calcola un certo incremento della densità $\mathfrak{W}$ d'energia elettromagnetica, considerando lo sviluppo di calore Joule per unità di tempo e di volume come costituente tutta la potenza $\Pi^{(e)}$ ceduta dal campo alla materia per unità di volume. Da questo punto di vista $\mathfrak{W}$ risulta avere espressione semplice solo nel caso lineare e vien detta densità d'energia immagazzinata nel campo. Successivamente, passando al caso non stazionario, si conserva a $\mathfrak{W}$ il suaccennato significato e si interpreta il teorema di Poynting (usualmente supponendo ancora fissi i corpi) dal suaccennato punto di vista su $\mathfrak{W}$ e $\Pi^{(e)}$.

Considerando una generale teoria di elettro–magneto–strizione preferisco identificare $\mathfrak{W}$ con la densità W di *energia elettromagnetica non materiale*, di espressione semplicissima, che nel caso stazionario e di corpi fissi (ma con eventuale forza elettromotrice impressa $E_r^{(i)}$) risulta compatibile con una versione di $\Pi^{(e)}$ includente la potenza « microscopica » $k d\lambda/dt$ spesa dal campo, per unità di volume, sui dipoli elettrici e magnetici.

Combinando il teorema di Poynting secondo quest'ultimo punto di vista (su $\mathfrak{W}$ e $\Pi^{(e)}$) con l'equazione del bilancio energetico, si ottiene una semplice relazione valida anche nel caso di elettro–magneto–strizione non lineare.

Passando al caso non stazionario e di corpi comunque mobili, si presentano spontanee certe tre determinazioni $d_1\lambda$, $d_2\lambda$ e $d_3\lambda$ di $d\lambda$. Esse corrispondono a tre sistemi di coordinate lagrangiane per il generico elemento $d\mathfrak{C}$ di corpo continuo. Questi sono connessi con gli incrementi delle polarizzazioni

(*) Questo lavoro, la cui versione integrale è in corso di stampa sui « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », è stato eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca N. 29 del C.N.R., per l'anno accademico 1965–66.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1966.

caratterizzate rispettivamente mediante la derivata assoluta, il flusso co-rotante e quello trasportato. Quindi il secondo di tali sistemi interessa particolarmente i fluidi, il terzo i solidi. Introduco due determinazioni simmetriche ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ e ${}_3E^*_{\alpha\beta}$ del tensore energetico $E_{\alpha\beta}$ le quali mediante la parte temporale della divergenza forniscono esattamente, anche nel caso di corpi comunque mobili, il calore Joule prodotto per unità di volume (proprio) e di tempo, aumentato rispettivamente, delle potenze microscopiche $kd_2\lambda/dt$ e $kd_3\lambda/dt$ per unità di volume, e diminuito dell'analoga potenza della eventuale forza elettromotrice impressa.

A quanto mi consta queste determinazioni di $E_{\alpha\beta}$ coincidono con altre già effettivamente usate, solo in assenza di polarizzazione magnetica (1).

In qualche prossimo lavoro intendo contribuire a mostrare l'interesse dei tensori ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ e ${}_3E^*_{\alpha\beta}$ nelle teorie di elasticità a base termodinamica (e a deformazioni finite) includenti pure l'elettromagneto-strizione, dimostrando che fra le svariate determinazioni simmetriche di $E_{\alpha\beta}$, possibili in effettiva presenza di polarizzazione, solo una è dotata di un certo carattere privilegiato riguardo ai fluidi e solo una lo è riguardo ai solidi.

Mediante le determinazioni di $E_{\alpha\beta}$ in discorso, si possono dare al teorema di Poynting, nel caso generale di corpi mobili, espressioni conformi al punto di vista su $\mathcal{W}$ e $\Pi^{(e)}$ considerato nel presente lavoro (tra l'altro, le parti temporali di ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ ed ${}_3E^*_{\alpha\beta}$ coincidono con W e i corrispondenti vettori di flusso di energia elettromagnetica col vettore di Poynting).

Essendo numerose le questioni di elettromagnetismo riferentesi a corpi fissi, è spontaneo considerare il problema di associare alla generica determinazione ${}^rE_{\alpha\beta}$ di $E_{\alpha\beta}$ qualche altra determinazione dello stesso tipo la quale, da un lato, sia conforme al precedente punto di vista su $\mathcal{W}$ e $\Pi^{(e)}$, e dall'altro, fornisca la stessa 4-forza ponderomotrice della ${}^rE_{\alpha\beta}$ [6].

2. PRELIMINARI SULLO SPAZIO-TEMPO. – Considero uno spazio-tempo $S_n$ ammissibile secondo la Relatività generale o ristretta e vi assumo una metrica di Minkowski $ds^2$ e un tensore orientato $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ di Ricci per cui (2)

$$(1) \qquad ds^2 = -g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad , \quad g_{00} > 0 \quad , \quad \varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} > 0.$$

Detta $c$ la velocità della luce nel vuoto, la 4-velocità $u^\alpha$ della materia e la 4-accelerazione $c^{-2}\,\mathcal{A}_\alpha$ sono determinate da

$$(2) \qquad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \quad , \quad \mathcal{A}_\alpha = \frac{Du_\alpha}{Ds} = u_{\alpha/\beta}\, u^\beta \qquad (u^\alpha\, u_\alpha = -1 \,,\, u^\alpha\, \mathcal{A}_\alpha = 0).$$

(1) È spontaneo porre ciò in relazione col fatto che vi sono generali teorie di elasticità (a deformazioni finite) includenti l'elettrostrizione – cfr. per esempio [15] – ma, almeno a quanto mi consta, tali teorie non sono state estese alla magneto-strizione.

(2) Convengo che, salvo contrario avviso, gli indici greci varino da 0 a 3 e quelli latini da 1 a 3. Con la sbarra denoto derivazione tensoriale. Uso pure la convenzione di Einstein sulla soppressione dei simboli di sommatoria.

Usando $\delta_{\alpha\beta}$ come simbolo di Kronecker, dirò che il riferimento $(x)$ è (*localmente*) *naturale e proprio* nel punto evento $\xi$ se ivi si ha

$$(3)\qquad g_{\alpha\beta} = \delta'_{\alpha\beta} \quad , \quad \partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma = 0 \quad , \quad u^\alpha = \delta^\alpha_0 \qquad (\delta'_{\alpha 0} = -\delta_{\alpha 0} \, , \, \delta'_{\alpha r} = \delta_{\alpha r}).$$

Userò pure il tensore spaziale di Ricci (3) $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma}$, il proiettore spaziale $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ e il derivato (tensoriale) trasverso $T^{\dots}_{\dots/\tilde{\alpha}}$:

$$(4)\qquad \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} = u^\varrho \varepsilon_{\varrho\alpha\beta\gamma} \quad , \quad \tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \quad , \quad T^{\dots}_{\dots/\tilde{\alpha}} = T^{\dots}_{\dots/\beta}\, \tilde{g}^\beta{}_\alpha .$$

Per ogni tensore doppio $E_{\alpha\beta}$ è possibile la *decomposizione naturale*

$$(5)\qquad \begin{cases} E_{\alpha\beta} = E u_\alpha u_\beta + E'_\alpha u_\beta + u_\alpha E''_\beta + \tilde{E}_{\alpha\beta} & \text{con} \\ E'_\alpha u^\alpha = E''_\alpha u^\alpha = u^\alpha \tilde{E}_{\alpha\beta} = \tilde{E}_{\alpha\beta} u^\beta = 0 . \end{cases}$$

Riferendomi ad $E_{\alpha\beta}$ ne dico $E u_\alpha u_\beta$ *parte temporale*, $E_{\alpha\beta}$ *parte spaziale* ed $E'''_{\alpha\beta} = E'_\alpha u_\beta + u_\alpha E''_\beta$ *parte mista*. Convengo di usare notazioni analoghe alle $E$, $E'_\alpha$, $E''_\beta$, $\tilde{E}_{\alpha\beta}$ ed $E'''_{\alpha\beta}$ in relazione ad un qualunque tensore doppio in $S_4$.

Sia $c^{-2}\rho$ la densità propria di massa inerziale, $k$ quella di massa convenzionale relativa ad uno stato di riferimento $\Sigma^*$ (4) e $kw$ la densità propria di energia interna, nulla in $\Sigma^*$. Allora – cfr. [1 (141)] – tra l'altro intendendo con $T^{\dots}_{\dots}$ un tensore generico, si ha

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{k}\dfrac{Dk}{Ds} = -u^\beta{}_{/\beta} \quad , \quad \rho = k(c^2 + w) , \\[2ex] k\dfrac{D}{Ds}(k^{-1} T^{\dots}_{\dots}) = \dfrac{DT^{\dots}_{\dots}}{Ds} + u^\beta{}_{/\beta} T^{\dots}_{\dots} . \end{cases}$$

Considero il *flusso controvariante* $cD^c V^\alpha/Ds$ trasportato [convected] dal vettore spaziale $V^\alpha$, quello *covariante* $cD_c V^\alpha/Ds$ e il *flusso co-rotante* $cD_r V^\alpha/Ds$: (5)

$$(7)\qquad \tilde{g}^\alpha_\varrho \frac{D^c V^\varrho}{Ds} = \frac{D^c V^\alpha}{Ds} + u^\alpha{}_{/\varrho} V^\varrho = \frac{D_c V^\alpha}{Ds} - u_{\varrho}{}^{/\alpha} V^\varrho = \frac{D_r V^\alpha}{Ds} + u^{[\alpha}{}_{/\varrho]} V^\varrho .$$

3. LAVORI MICROSCOPICI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO INTERESSANTI I FLUIDI E I SOLIDI. EQUAZIONE DEL BILANCIO ENERGETICO DAL PUNTO DI VISTA MICROSCOPICO. – Siano $E_\alpha$ e $H_\alpha$ i campi (propri) elettrico e magnetico, $D_\alpha$ e $B_\alpha$ le corrispondenti induzioni, $P_\alpha$ e $M_\alpha$ le rispettive polarizzazioni per unità di volume proprio, e infine $\pi_\alpha$ e $\mu_\alpha$ le stesse polarizzazioni riferite però

(3) Dico il tensore $T_{\varrho_1 \dots \varrho_n}$ *spaziale* se è *spaziale* ogni suo indice $\rho_i$ ossia $T_{\dots \varrho_i \dots} u^{\varrho_i} = 0$.

(4) Nello stato di riferimento $\Sigma^*$ l'elemento $d\mathcal{C}$ del sistema materiale continuo $\mathcal{C}$ in considerazione abbia il volume proprio $d\mathcal{C}^*$ e sia $k^* d\mathcal{C}^*$ la sua massa gravitazionale. Come in [1] e [2] dico questa *massa convenzionale*. Indi pongo $k\,dC = k^*\,dC^*$ ove $dC$ è il volume proprio attuale del $d\mathcal{C}$.

(5) Uso parentesi tonde e quadre per denotare le parti simmetrica e rispettivamente emisimmetrica di tensori. Per esempio ritengo

$$2\,T_{(\alpha\beta}U_{\gamma)} = T_{\alpha\beta}U_\gamma + T_{\gamma\beta}U_\alpha \quad , \quad 2\,T_{[\alpha}{}^{\beta]} = T_\alpha{}^\beta - T^\beta{}_\alpha .$$

all'unità di massa convenzionale. I precedenti vettori, tutti spaziali, verificano le

$$(8)\qquad D_\alpha = E_\alpha + P_\alpha \quad , \quad B_\alpha = H_\alpha + M_\alpha \quad , \quad P_\alpha = k\pi_\alpha \quad , \quad M_\alpha = k\mu_\alpha .$$

Sia $\mathcal{C}$ un corpo continuo e $d\mathcal{C}$ un suo elemento (3–dimensionale) circostante il «punto materiale» $P^*$.

Tralasciando per semplicità le coppie di contatto, il gradiente spaziale di posizione e i vettori spaziali $\pi_\alpha$ e $\mu_\alpha$ possono assumersi come coordinate lagrangiane del $d\mathcal{C}$ – eventualmente sovrabbondanti, come per esempio nel caso che il $d\mathcal{C}$ abbia un vincolo interno (macroscopico) quale quello d'incomprimibilità –. Riferendosi a coordinate localmente naturali e proprie – cfr. (3) – la suddetta assunzione corrisponde a ritenere come parametri di mobilità del $d\mathcal{C}$ $v_{r/s} (= cu_{r/s})$, $\dot{\pi}_r (= c D\pi_r/Ds = \pi_{r/s} u^s)$ e $\dot{\mu}_r$.

Si può scindere l'incremento $\pi_l\, ds$ di $\pi_l$ o in quello $d_2 \pi_l = u_{l/m} \pi^m ds$ dovuto alla rotazione locale, e nella parte rimanente $D_r \pi_l$ – cfr. (7) –, oppure in quello $d_3 \pi_l = u_{l/m} \pi^m ds$ dovuto all'atto di moto omografico locale, e nella parte rimanente $D^c \pi_l$ cfr. (7).

In altre parole il parametro di mobilità $\dot{\pi}_l$ può esser sostituito con $D_r \pi_l/Ds$ o $D^c \pi_l/Ds$. Lo stesso dicasi di $\dot{\mu}_l$.

Dunque, in connessione con gli incrementi $D$, $D_r$ e $D^c$ di $\pi_l$ e $\mu_l$, è spontaneo considerare tre sistemi di parametri di mobilità per il $d\mathcal{C}$, dei quali il secondo e il terzo hanno particolare interesse riguardo ai fluidi e rispettivamente ai solidi. Siano $dl^{(I)}$, $d\lambda_c$ e $kd\lambda$ i lavori delle forze interne, esterne di contatto e rispettivamente esterne a distanza (elettromagnetiche) fatti sul $d\mathcal{C}$ per unità di volume, nel tempuscolo $c^{-1} ds$ e nel riferimento inerziale $R_{P^*t}$ ove $P^*$ è istantaneamente fermo; nel caso elastico essi sono forme lineari nell'$a$–mo dei suddetti sistemi ($a = 1 , 2 , 3$). Sia

$$(9)\qquad \begin{cases} d_1 \lambda = E_\alpha D\pi^\alpha + H_\alpha D\mu^\alpha \quad , \quad d_2 \lambda = E_\alpha D_r \pi^\alpha + H_\alpha D_r \mu^\alpha , \\ d_3 \lambda = E_\alpha D^c \pi^\alpha + H_\alpha D^c \mu^\alpha = d\lambda_2 - (E^\alpha \pi^\beta + H^\alpha \mu^\beta)\, u_{(\alpha/\beta)}\, ds . \end{cases}$$

Dette $d_a l'$ e $d_a \lambda'_c$ le parti di $dl^{(I)}$ e $d\lambda_c$ dovute solo agli incrementi di $\pi^\alpha$ e $\mu^\alpha$ nell'$a$–mo sistema, per $a = 2 , 3$ e ritenendo ${}_a X^{\alpha\beta}$ spaziale, sia pure

$$(10)\qquad dl^{(I)} = d_a l' + d_a l^{(i)} \quad , \quad d\lambda_c = d_a \lambda'_c + d_a \lambda''_c \quad , \quad d_a l^{(i)} = {}_a X^{(\alpha\beta)}\, u_{\alpha/\beta}\, ds .$$

Come in molte questioni di Fisica si pensi il $d\mathcal{C}$ grande rispetto al raggio d'azione molecolare, onde $d_2 \lambda'_c = 0$. Mediante considerazioni di carattere microscopico si può mostrare che è $d\lambda_c + k\,(E^s D\pi_s + H^s D\mu_s) = 0$ per $v_{(l/s)} = D\pi_s - D_r \pi_s = D\mu_s - D_r \mu_s = 0$, inoltre $d\lambda_c = - dl^{(i)}$ per $v_{[l/s]} = 0$, e infine $d_a l' + d_a \lambda = 0$ ($a = 1 , 2 , 3$) – ovviamente $d_1 \lambda = d\lambda$ –. La penultima eguaglianza e $(10)_{1,3}$ ($a = 2 , 3$) implicano la ${}_3 X^{(\alpha\beta)} = {}_2 X^{(\alpha\beta)} - E^{(\alpha} P^{\beta)} - H^{(\alpha} M^{\beta)}$.

Nel riferimento $R_{P^*t}$ sia $dT'\, dC$ – cfr. nota [4] – l'incremento nel tempuscolo $dt$, dell'energia cinetica microscopica del $d\mathcal{C}$; inoltre ora si intenda $kdw\, dC$ come l'analogo incremento $(dT' - dl^{(I)})\, dC$ dell'energia interna totale del $d\mathcal{C}$; infine si indichi con $(d\lambda_c + q_{ass}\, dt)\, dC$ il lavoro fatto sul $d\mathcal{C}$ nel $dt$ dalle forze di contatto esterne al $d\mathcal{C}$ e intese in senso microscopico, la parte

$q_{\text{ass}}\, dt\, dC$ essendo dovuta al trasferimento di energia cinetica microscopica nel moto di agitazione termica. Allora, stante $(10)_3$ e dette $J^r$ la densità di corrente elettrica e $E_r$ la forza elettromotrice di Maxwell, se è nulla quella impressa $E_r^{(i)}$, il teorema delle forze vive, applicato al $d\mathcal{C}$ nel riferimento $R_{P^*t}$ dal punto di vista microscopico, può ridursi alla forma

$$(11) \qquad k dw + d_a l^{(i)} = k d_a \lambda + (q_{\text{ass}} + J^r E_r)\, dt \qquad (a = 2\,,\,3).$$

Nel caso di presenza di coppie di contatto, oltre a $v_{r/s}$ va considerato come parametro (tensoriale) di mobilità pure $v_{[l/r]s}\,(= c u_{[l/r]s})$ e per $a = 1\,,2$ si ha, in luogo di $(10)_3$,

$$(12) \qquad d_a l^{(i)} = {}_aX^{rs} v_{r/s} - m^{lrs} v_{l/rs} \qquad ({}_3X^{(\alpha\beta)} = {}_2X^{(\alpha\beta)} - E^{(\alpha} P^{\beta)} - H^{(\alpha} M^{\beta)}),$$

ove i coefficienti $m^{lrs}\,(= - m^{rls})$ non dipendono dall'indice $a$.

La relazione (11), che dal punto di vista macroscopico costituisce l'equazione del bilancio energetico, mostra che il lavoro microscopico $k d_a \lambda$ del campo elettromagnetico va in energia immagazzinata nella materia – attraverso il termine $kdw$ – piuttosto che nel campo.

Per $E_r^{(i)} \neq 0$, l'incremento $kdw$ contiene termini nei differenziali dei parametri $c_{(1)}, \cdots, c_{(N)}$ di affinità chimica, opposti al contributo chimico da aggiungersi all'espressione $(10)_1$ del $dl^{(I)}$. Dunque di nuovo si ha $kdw = dT' - dl^{(i)}$ e, stante (12), anche la (11) si mantiene valida.

4. ENERGIA ELETTROMAGNETICA NON MATERIALE. CASO DEI CORPI FISSI. – Di solito per determinare la densità $\mathfrak{W}$ di energia elettromagnetica si considerano dei dielettrici (e dei conduttori) fissi, nell'ambito della Fisica classica o della Relatività ristretta. Si immagina di trasportare su di essi della carica elettrica inizialmente dispersa all'infinito e si trova che per aumentare i campi $E_r$ e $D_r$ di $dE_r$ e rispettivamente di $dD_r$ si deve spendere, per unità di volume, il lavoro $E^r dD_r = d\,(2^{-1} E^r E_r) + E^r dP_r$. Si eguaglia quindi questo lavoro al $d\mathfrak{W}$ considerando $\mathfrak{W}$ come densità di *energia elettrica immagazzinata nel campo* per unità di volume – cfr. [14] p. 196 –. $\mathfrak{W}$ è allora funzione di $E_r$ e $D_r$ solo nel caso di dielettrico lineare.

$E^r dP_r$ è il lavoro microscopico fatto per unità di volume dal campo elettrico sulla materia. Per (9) e (11) esso incrementa l'energia interna – di densità $kw$ – della materia. Sulla base di ciò e dell'analogo magnetico varie considerazioni inducono, specialmente in vista di una generale teoria di elettromagneto-strizione – cfr. nota (1) –, a considerare $2^{-1} E^r E_r$ e $W = 2^{-1} (E^r E_r + H^r H_r)$ come *densità di energia elettrica e rispettivamente elettromagnetica, non materiale*, e ad identificare $\mathfrak{W}$ con W.

Sempre nel caso dei corpi fissi il teorema di Poynting si può allora enunciare *eguagliando il decremento, per unità di tempo, dell'energia non materiale contenuta in una regione spaziale* C, *al flusso dell'energia elettromagnetica uscente dal contorno* $\Sigma$ *di* C (*tale flusso essendo rappresentato mediante il vettore di Poynting*), *aumentato del calore Joule prodotto in* C *per unità di tempo, diminuito della potenza di eventuali forze elettromotrici impresse, e infine aumentato* *del lavoro microscopico fatto dal campo elettromagnetico in* C – per (9) nel caso di corpi fissi è $d_1 \lambda = d_2 \lambda = d_3 \lambda$ –.

Che ritenere $\mathcal{W} = W$ sia opportuno risulta pure dal fatto che, combinando il teorema di Poynting con (11), nel caso di corpi fissi, ma capaci di elettro- e magneto-strizione (anche non lineare), si ha semplicemente

$$(13) \qquad \frac{d}{dt}(kw+W) - q_{ass} + c\mathcal{S}^r{}_{/r} = 0 \qquad (2\,W = E^r E_r + H^r H_r\,,\ \mathcal{S}_a = \varepsilon_{\alpha\varrho\sigma} E^\varrho H^\sigma).$$

Dunque, *nel caso considerato e per unità di tempo, l'aumento in* C *dell'energia interna e di quella elettromagnetica non materiale eguaglia il calore entrante attraverso* $\Sigma$ *per irraggiamento e per conduzione.*

Si noti che quanto sopra, e in particolare (13), vale anche quando $w$ non sia la somma di due termini, dei quali uno dipenda solo dai vettori $\pi_r$ e $\mu_r$ (o da $E_r$ e $H_r$) e l'altro sia invece da essi indipendente.

5. Introduzione dei tensori energetici ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ e ${}_3E^*_{\alpha\beta}$ utili per l'elettro-magneto-strizione nei fluidi e rispettivamente nei solidi. Corrispondente versione del teorema di Poynting. – Stanti (4) e $(13)_{2,3}$ considero le seguenti determinazioni simmetriche del tensore energetico $E_{\alpha\beta}$:

$$(14) \qquad \begin{cases} {}_2E^*_{\alpha\beta} = W(\mathring{g}_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) + 2\,u_{(\alpha}\,\mathcal{S}_{\beta)} - 2\,E_{(\alpha}\,B_{\beta)} - E_{(\alpha}\,P_{\beta)} + B_{(\alpha}\,M_{\beta)}\,, \\ {}_3E^*_{\alpha\beta} = W(\mathring{g}_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) + 2\,u_{(\alpha}\,\mathcal{S}_{\beta)} - 2\,E_{(\alpha}\,B_{\beta)} + H_{(\alpha}\,M_{\beta)} + B_{(\alpha}\,M_{\beta)}\,. \end{cases}$$

In assenza di campo magnetico esse coincidono con determinazioni di $E_{\alpha\beta}$ effettivamente usate – cfr. [16 (284.7), (284.11), (287.2), ···, (287.4)] –. Esse sono utili trattando l'elettro-magneto-strizione nei fluidi e rispettivamente nei solidi in quanto, detta $J'_\alpha$ la densità di 4-corrente vera, le parti temporali delle loro divergenze eguagliano esattamente, nel caso generale di corpi comunque mobili, il calore Joule $(E_\alpha + E^{(i)}_\alpha)\,J'_\alpha$ sviluppato per unità di volume e di tempo, diminuito dell'eventuale potenza $E^{(i)}_\alpha J'_\alpha$ della forza elettromotrice impressa e aumentato della potenza microscopica del campo elettromagnetico $kd_2\lambda/dt$ e rispettivamente della $kd_3\lambda/dt$:

$$(15) \qquad \begin{cases} u^\alpha\,{}_2E^{*\,/\beta}_{\alpha\beta} = E^\alpha J'_\alpha + k\left(E^\alpha \dfrac{D_r \pi_\alpha}{Ds} + H^\alpha \dfrac{D_r \mu_\alpha}{Ds}\right) \\ u^\alpha\,{}_3E^{*\,/\beta}_{\alpha\beta} = E^\alpha J'_\alpha + k\left(E^\alpha \dfrac{D^c \pi_\alpha}{Ds} + H^\alpha \dfrac{D^c \mu_\alpha}{Ds}\right). \end{cases}$$

Le determinazioni (14) di $E_{\alpha\beta}$ sono conformi con quanto si è detto sulla energia elettromagnetica e sul lavoro microscopico del campo elettromagnetico in quanto è ${}_2E^* = {}_3E^* = W$ – cfr. (5), (14) – e valgono le (15).

Si osservi pure che, per $a = 2\,,\,3$ il flusso (proprio) – $cu^\alpha\,{}_aE^*_{\alpha\beta}$ corrispondente al tensore ${}_aE^*_{\alpha\beta}$ è esattamente il vettore di Poynting; inoltre la versione puntuale del teorema di Poynting connessa con ${}_aE^*_{\alpha\beta}$ e quindi conforme col presente punto di vista, è, nel caso generale,

$$(16) \qquad k\frac{DW/k}{Ds} + \mathcal{S}^\alpha{}_{/\tilde{\alpha}} + 2\,\mathcal{S}^\alpha\,\mathfrak{a}_\alpha + {}_a\mathring{E}^{*\alpha\beta}\,u_{\alpha/\beta} + E^\alpha J'_\alpha + k\frac{d_a\lambda}{ds} = 0 \quad (a = 2\,,\,3).$$

Dunque per $a = 2\,,\,3$, *in ogni* D$s$ *l'aumento della energia elettromagnetica non materiale sovrapposta all'elemento materiale* $d\mathcal{C}$ *(di volume proprio* $d$C *even-*

*tualmente variabile) eguaglia quella* $-\mathcal{S}^{\alpha}{}_{/\tilde{\alpha}}\, dC\, Ds$ *entrante nel* $d\mathcal{C}$, *diminuita del termine* $2\,\mathcal{S}^{\alpha}\,\mathfrak{A}_{\alpha}\, dC\, Ds$ *in un certo senso connesso con l'irraggiamento della energia elettromagnetica attraverso la materia accelerata* (6), *aumentata del lavoro (intrinseco)* $-\tilde{\tilde{E}}^{*\alpha\beta}\, u_{\alpha/\beta}\, dC\, Ds$ *fatto (sull'energia elettromagnetica sovrapposta al* $d\mathcal{C}$*) dalle pressioni elettromagnetiche, aumentata pure del lavoro di eventuali forze elettromotrici impresse presenti nel* $d\mathcal{C}$, *e infine diminuita del calore Joule prodotto nel* $d\mathcal{C}$ e *del lavoro microscopico* $k d_a \lambda dC$ *fatto dal campo sui dipoli.*

Tra l'altro, una volta che si sia deciso di usare ${}_aE^*_{\alpha\beta}$, con $a=2$ per i fluidi e $a=3$ per i solidi, e che si sia esplicitato il teorema di Poynting usando appunto la determinazione ${}_aE^*_{\alpha\beta}$ di $E_{\alpha\beta}$, in tale esplicitazione figura il lavoro delle pressioni elettromagnetiche $-{}_a\tilde{\tilde{E}}^*_{\alpha\beta}$ connesse con lo stesso tensore ${}_aE^*_{\alpha\beta}$. Diversamente accade quando si scriva l'analogo di (16) per determinazioni di $E_{\alpha\beta}$ molto in uso – per esempio le [16 (187.2), $\cdots$, (187.4)] –.

6. TENSORI ${}^{M}E_{\alpha\beta}$ ED ${}^{A}E_{\alpha\beta}$, INTERESSANTI SPECIALMENTE IL CASO DI CORPI FISSI, ASSOCIATI AD UNA QUALUNQUE DETERMINAZIONE DI $E_{\alpha\beta}$ IN CONFORMITÀ COL PRECEDENTE PUNTO DI VISTA SU $\mathfrak{W}$ E $\Pi^{(e)}$. – Il tensore energetico $E_{\alpha\beta}$ è largamente arbitrario per $P_a \neq 0$ o $M_a \neq 0$ [1]. In futuri lavori intendo mostrare che riguardo alla Elasticità includente elettro– e magneto–strizione vi è al più una determinazione di $E_{(\alpha\beta)}$ privilegiata per fluidi e una per solidi. Tuttavia varie determinazioni ${}^{r}E_{\alpha\beta}$ di $E_{\alpha\beta}$ sono in uso. D'altro canto numerose questioni di elettromagnetismo riguardano il caso di corpi fissi. È allora spontaneo associare ad ${}^{r}E_{\alpha\beta}$ i seguenti tensori energetici ${}^{Mr}E_{\alpha\beta}$ e ${}^{Ar}E_{\alpha\beta}$:

$$(17)\qquad {}^{Mr}E_{\alpha\beta} = W u_\alpha u_\beta + E'_\alpha u_\beta + u_\alpha \mathcal{S}_\beta + {}^{r}\tilde{\tilde{E}}_{\alpha\beta}\quad,\quad {}^{Ar}E_{\alpha\beta} = W u_\alpha u_\beta + 2\, u_{(\alpha}\mathcal{S}_{\beta)} + {}^{r}\tilde{\tilde{E}}_{\alpha\beta}\,.$$

Il primo – che può dirsi di Minkowski, in quanto è a parte mista non simmetrica per ${}^{r}E'_\alpha \neq \mathcal{S}_\alpha$ – dà luogo, per $u_{\alpha/\beta}=0$, da un lato alla stessa forza ponderomotrice ${}^{r}\mathcal{F}_\alpha\ (= -\tilde{g}_\alpha{}^{\varrho}\, {}^{r}E_{\varrho\beta}{}^{/\beta})$ di ${}^{r}E_{\alpha\beta}$, e dall'altro alla stessa potenza ${}^{5}\Pi^{(e)}\ (= c u^\alpha\, {}_2E^*_{\alpha\beta}{}^{/\beta})$ comune a ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ e ${}_3E^*_{\alpha\beta}$ ed espressa da (15).

Quanto a ${}_3E^*_{\alpha\beta}$, mentre è sempre $u^\alpha\, {}^{Ar}E_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = {}^{5}\Pi^{(e)}$, in generale $-\tilde{g}_{\alpha\varrho}\, {}^{Ar}E^{\varrho}{}_{\beta}{}^{/\beta}$ differisce da ${}^{r}\mathcal{F}_\alpha$, però per termini che nei casi concreti sono molto piccoli e del tipo di quelli connessi con la differenza fra i tensori originali di Minkowski ed Abraham (da cui il contrassegno A in ${}^{Ar}E_{\alpha\beta}$).

La considerazione di ${}^{Ar}E_{\alpha\beta}$ è molto opportuna specialmente in Relatività generale, perché (a differenza di quanto generalmente accade per ${}^{Mr}E_{\alpha\beta}$) ${}^{Ar}E_{\alpha\beta}$ ha in ogni caso parte mista ${}^{Ar}E'''_{\alpha\beta}$ simmetrica, il che in tale teoria può considerarsi come doveroso quando non si vogliano introdurre non necessarie grandezze correttive, prive di analogo classico.

A quanto mi consta il tensore energetico $E_{\alpha\beta}$ viene determinato in vari modi ma è sempre *accettabile* nel senso che soddisfa le seguenti due condizioni:

(6) Quando si dia peso al fatto che $\mathcal{S}^\alpha\,\mathfrak{A}_\alpha$ si presta meglio di $2\,\mathcal{S}^\alpha\,\mathfrak{A}_\alpha$ alla considerata interpretazione, si può sostituire nella (16) $\mathcal{S}^\alpha{}_{/\tilde{\alpha}} + 2\,\mathcal{S}^\alpha\,\mathfrak{A}_\alpha$ con $\mathcal{S}^\alpha{}_{/\alpha} + \mathcal{S}^\alpha\,\mathfrak{A}_\alpha$. Ciò, tra l'altro, è conforme al punto di vista di C. Cattaneo sui teoremi di conservazione, in quanto questo punto di vista si differenzia nettamente dai precedenti per l'uso di divergenze spazio–temporali anziché spaziali – cfr. [7] p. 29 –.

a) *Il tensore* $E_{\alpha\beta}$ *è una funzione* $\varphi_{\alpha\beta}(E_\varrho, \dot{H}_\varrho, P_\varrho, M_\varrho, \tilde{g}_{\varrho\sigma})$ *continua assieme alle derivate* 1ᵉ *e* 2ᵉ, *inoltre è spazialmente emitropica* (*ossia ha la stessa forma in tutti i sistemi destrorsi di coordinate localmente naturali e proprie*).

b) *Risulta* $E_{\alpha\beta} = 2E^*_{\alpha\beta}$ *per* $P_\varrho = M_\varrho = 0$ (*onde* $E_{[\alpha\beta]} = 0$ *nel vuoto*).

In [6] ho dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA. – *Espressa comunque la densità* $K_\alpha (= \mathfrak{F}_\alpha + c^{-1} u_\alpha \Pi^{(e)}$ *con* $\mathfrak{F}_\alpha u^\alpha = 0)$ *di 4-forza ponderomotrice, come funzione di* $E_\varrho, H_\varrho, P_\varrho, M_\varrho$ *e* $\tilde{g}_{\varrho\sigma}$ *e dei derivati primi di tali tensori* (*e, se si vuole, anche delle densità* $J'_\varrho$ *e* $J''_\varrho$ *di corrente vera e di polarizzazione*), *esiste al più un tensore elettromagnetico accettabile* $E_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}(E_\varrho, H_\varrho, P_\varrho, M_\varrho, \tilde{g}_{\varrho\sigma})$ *il quale sia connesso con la suaccennata espressione di* $K_\alpha$ *nel senso che l'eguaglianza* $E_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = - K_\alpha$ *valga per ogni materiale e in ogni processo fisicamente possibile* (7).

Da tale teorema risulta che ${}^{Mr}E_{\alpha\beta}$ è l'unico tensore verificante le condizioni esplicitamente imposte ad ${}^{Mr}E_{\alpha\beta}$. Allora per ${}^{Mr}E'_\alpha \not\equiv \mathfrak{F}_\alpha$ [cfr. (17)] non esiste un tensore a parte mista simmetrica e verificante le stesse condizioni. Quindi ${}^{Ar}E_{\alpha\beta}$ appare come la migliore soluzione approssimata del problema considerato (solubile esattamente mediante ${}^{Mr}E_{\alpha\beta}$), la quale abbia la parte mista simmetrica.

## BIBLIOGRAFIA.


[1] BRESSAN A., *Una teoria di cinematica dei sistemi continui in relatività generale*, « Annali di Mat. pura ed appl. », ser. IV, vol. LXII (1963).

[2] BRESSAN A., *Termodinamica e magneto-visco-elasticità con deformazioni finite in Relatività generale*, « Rend. Sem. mat. Univ. di Padova », vol. XXXIV (1964).

[3] BRESSAN A., *Coppie di contatto in Relatività*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa » (1966).

[4] BRESSAN A., *Elasticità relativistica con coppie di contatto*. In corso di stampa su « Ricerche di Matematica » Napoli.

[5] BRESSAN A., *On relativistic Thermodynamics*. In corso di stampa su « Il Nuovo Cimento ».

[6] BRESSAN A., *Qualche proprietà di unicità del tensore energetico del campo elettromagnetico*. In corso di stampa su « Rend. del circolo mat. di Palermo ».

[7] CATTANEO C., *Principi di conservazione e teoremi di Gauss in Relatività generale*. Ed. Cremonese, Roma 1963.

[8] ECKART C., *The thermodynamics of irreversible Processes* – III. *Relativistic theory of the simple fluid*, « Physical Review », vol. 58 (1940).

[9] FINZI-PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*. Bologna, Zanichelli, 1961.

[10] GRIOLI G., *Elasticità asimmetrica*, « Annali di Mat. pura ed appl. », ser. IV, vol. L (1960).

[11] GYORGYI G., *Die Bewegung des Energiemittelpunktes und der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Dielektrika*, « Acta phys. Hung. », *4*, 121–131 (284).

[12] PERSICO E., *Introduzione alla Fisica Matematica*. Bologna, Zanichelli, 1948.

[13] PHAM MAU QUAN, *Sur une theorie relativiste des fluides thermodynamiques*, « Ann. di Mat. pura ed appl. », (4), *38* (1955).

[14] STRATTON J. A., *Teoria dell'elettromagnetismo*. Einaudi, Torino 1952.

[15] TOUPIN R. A., *The elastic dielectric*, « J. Rational Mech. Anal. », *5* (1956).

[16] TRUESDELL C. e TOUPIN R. A., *The classical field theory*, in *Handbuch der Physik*, vol. III/I. Springer Verlag, p. 226 (1960).


(7) Tale validità equivale a quella della stessa eguaglianza $E_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = - K_\alpha$ per ogni materiale e per ogni scelta delle funzioni $E_\varrho, H_\varrho, P_\varrho$ e $M_\varrho$ delle $x^a$, verificanti le equazioni di Maxwell.