Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carla Vaghi

Sul comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni non lineari di tipo parabolico. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.3-4, p. 169–174.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_3-4_169_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Analisi matematica. — *Sul comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni non lineari di tipo parabolico.* Nota II di CARLA VAGHI, presentata [(*)] dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — Consider the non linear parabolic equation

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} - f(x,t,z,p) \tag{1}$$

$$\left(x = x_1,\cdots,x_m \in \Omega\,;\, p = p_1,\cdots,p_m\,;\, p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right),$$

with the boundary condition $z(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$.

Under appropriate assumptions on the function $f(x,t,z,p)$, it is proved that all the solutions of (1) have the same asymptotic behaviour when $t \to +\infty$. Subsequently, some uniqueness theorems of solutions bounded on $(-\infty,+\infty)$ are given.

§ 3. Ammettiamo ora i *coefficienti dell'operatore* A *indipendenti da* t:

$$Az = \sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Si hanno allora per le soluzioni dell'equazione (1.2), soddisfacenti la condizione ai limiti (2.1), i seguenti risultati:

III. - *Siano soddisfatte le ipotesi*:

a) *l'equazione differenziale*

$$A\varphi + \lambda\varphi = 0 \tag{3.1}$$

ammetta in $\overline{\Omega}$ *una soluzione* $\varphi(x) > 0$, *corrispondente a un valore* $\lambda > 0$;

b) *esista una funzione* $\omega_1(z)$, *continua per* $z \in J$, *tale che sia*

$$z\,\omega_1(z) > 0 \qquad per \quad z \neq 0,$$

e risulti

$$w\left\{f\left(x,t,z+w,p_1+w\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\cdots,p_m+w\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\right)-\right. \tag{3.2}$$

$$\left.-f(x,t,z,p_1,\cdots,p_m)\right\} \geq w\,\omega_1(w) - \lambda w^2.$$

Allora le soluzioni dell'equazione (1.2) *hanno il comportamento asintotico precisato in* II.

Si osservi che *se la funzione* f *è indipendente da* p, ed $\omega_1(w) = cw$, con $0 < c < \lambda$, posto

$$c - \lambda = -c_0,$$

(*) Nella seduta del 22 giugno 1966.

la (3.2) diventa

$$w\{f(x,t,z+w)-f(x,t,z)\}\geq -c_0 w^2. \tag{3.3}$$

Si riottiene cioè una condizione analoga a quella data da Prodi per l'equazione (1.1) (cfr. loc. cit. in [2], § 2, teorema I, p. 367).

Come esempio di applicazione del teorema III, possiamo dare il seguente criterio:

IV. – *L'operatore* A *sia ellittico e a coefficienti costanti; la funzione* $f(x,t,z,p)$ *sia dotata di derivate parziali rispetto a* z *ed alle* p_i, *continue in* $D(x,t\in Q_0; z, p_i\in J)$ *ed ivi soddisfacenti ad una delle seguenti condizioni*

α) $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}\geq K_1 \quad ; \quad \displaystyle\sum_i^{1\cdots m}\frac{\partial f}{\partial p_i}\geq -K_2$

$(K_1>0$ *arbitrario*, $K_2=K_2(K_1,\Omega,a_{ij})>0)$;

β) $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}\geq -C_1 \quad ; \quad \displaystyle\sum_i^{1\cdots m}\frac{\partial f}{\partial p_i}\geq C_2$

$(C_2>0$ *arbitrario*, $C_1=C_1(C_2,\Omega,a_{ij})>0)$.

Allora le soluzioni della (1.2) *hanno il comportamento asintotico precisato in* II.

Dimostriamo il teorema III.

Sia $\varphi(x)$ una soluzione dell'equazione (3.1), continua in $\overline{\Omega}$ ed ivi positiva.

Posto

$$z(x,t)=y(x,t)\,\varphi(x), \tag{3.4}$$

risulta

$$z_t(x,t)=y_t(x,t)\,\varphi(x),$$

$$Az(x,t)=\varphi(x)\,Ay(x,t)+2\sum_{i,j}^{1\cdots m}a_{ij}(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}+y(x,t)\,A\varphi(x).$$

Pertanto $y(x,t)$ è soluzione dell'equazione

$$y_t=Ay-h\left(x,t,y,\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \tag{3.5}$$

ove

$$h\left(x,t,y,\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{\varphi}\left\{f\left(x,t,y\varphi,\frac{\partial y}{\partial x_i}\varphi+y\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-yA\varphi-2\sum_{i,j}^{1\cdots m}a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\}.$$

Verifichiamo che $h\left(x,t,y,\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right)$ soddisfa l'ipotesi (2.5) del teorema II.

Si ha infatti, $\forall v\in J$,

$$v\Delta h=v\left\{h\left(x,t,y+v,\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)-h\left(x,t,y,\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\right\}=$$

$$=\frac{v}{\varphi}\left\{f\left(x,t,y\varphi+v\varphi,\frac{\partial y}{\partial x_i}\varphi+y\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(x,t,y\varphi,\frac{\partial y}{\partial x_i}\varphi+y\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-vA\varphi\right\}.$$

Posto $v\varphi = w$, risulta, per la (3.4) e la (3.1) $\left(\text{ponendo al solito } p_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}\right)$

$$w\Delta h = \frac{w}{\varphi}\left\{f\left(x\,,t\,,z+w\,,p_i+\frac{w}{\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-f(x\,,t\,,z\,,p_i)+\lambda w\right\}.$$

Ne segue, per la (3.2), posto $\omega(v) = \omega_1(w)\min\limits_{x\in\bar\Omega}\varphi^{-1}(x)$,

$$v\Delta h \geq \frac{1}{\varphi}v\omega_1(w) \geq v\omega(v).$$

Ma allora per la funzione $y(x\,,t)$, soluzione della (3.5) valgono le proprietà enunciate nel teorema II e quindi, per la (3.4), le stesse proprietà valgono per le soluzioni dell'equazione (1.2). Il teorema III è così dimostrato.

Ammettiamo ora che A *sia a coefficienti costanti*:

$$Az = \sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \quad , \quad \sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij} = \rho > 0\,.$$

Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = \sin\gamma\left(\sum_i^{1\cdots m} x_i + \varepsilon\right)$$

avendo fissato γ ed ε in modo che risulti

$$0 < \gamma < \frac{\pi}{4ml} \quad , \quad l = \max_{x\in\bar\Omega}|x_i| \quad , \quad ml < \varepsilon < \frac{\pi}{2\gamma} - ml\,.$$

$\varphi(x)$, continua e positiva in $\bar\Omega$, è soluzione dell'equazione (3.1) corrispondente al valore $\lambda = \gamma^2\rho$.

Supponiamo soddisfatta l'ipotesi α) di IV, con K_1 arbitrario, e

$$0 < K_2 < \frac{1}{L}\left(\frac{K_1}{\gamma}+\rho\gamma\right) \quad , \quad L = \max_{x\in\bar\Omega}\operatorname{cotg}\gamma(x_1+\cdots+x_m+\varepsilon)\,.$$

Si ha allora (con ovvi valori di ξ e σ_i)

$$w\left\{f\left(x\,,t\,,z+w\,,p_i+w\,\frac{1}{\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-f(x\,,t\,,z\,,p_i)\right\} =$$

$$= w^2\left\{\frac{\partial f(x\,,t\,,\xi\,,\sigma_i)}{\partial z}+\gamma\operatorname{cotg}\gamma(x_1+\cdots+x_m+\varepsilon)\sum_1^m{}_k\frac{\partial f(x\,,t\,,\xi\,,\sigma_i)}{\partial p_k}\right\} \geq$$

$$\geq w^2\{K_1-\gamma K_2 L\} = w^2\left\{K_1 - L\gamma\frac{1}{L}\left(\frac{K_1}{\gamma}+\gamma\rho\right)+C\right\} = w^2(C-\lambda)\,,$$

$$(C = K_1+\rho\gamma^2-L\gamma K_2 > 0).$$

Pertanto l'ipotesi (3.2) del teorema III è soddisfatta per $\omega_1(w) = Cw$.

Analogamente se sono soddisfatte le ipotesi β) con $C_2 > 0$ arbitrario e

$$0 < C_1 < \gamma(MC_2+\gamma\rho) \quad , \quad M = \min_{x\in\bar\Omega}\operatorname{cotg}\gamma(x_1+\cdots+x_m+\varepsilon)\,,$$

risulta

$$w \left\{ f\left(x\,,t\,,z+w\,,p_i+w\,\frac{1}{\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) - f(x\,,t\,,z\,,p_i) \right\} \geq$$

$$w^2\{-C_1+\gamma \operatorname{cotg}\gamma(x_1+\cdots+x_m+\varepsilon)C_2\} \geq w^2(-MC_2\gamma-\gamma^2\rho+\gamma MC_2+\bar{C}) =$$

$$= w^2(\bar{C}-\lambda)\,, \qquad (\bar{C}=\gamma(MC_2+\gamma\rho)-C_1>0)$$

e quindi la (3.2) è ancora soddisfatta per $\omega_1(w)=\bar{C}w$.

§ 4. Supponiamo infine i coefficienti dell'operatore A e la funzione $f(x\,,t\,,z\,,p)$ definiti e continui anche per $t<0$.

Consideriamo ancora le soluzioni classiche della (1.2), ma prendendo ora come dominio d'integrazione il cilindro $\bar{Q}$. Le soluzioni saranno quindi funzioni $z(x\,,t)$ definite e continue in $\bar{Q}$, dotate di derivate $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ continue in Q, e soddisfacenti la condizione ai limiti

$$z(x\,,t)\,|_{\partial\Omega}=0 \qquad \text{per} \quad t\in J.$$

Valgono allora i seguenti teoremi di unicità:

I'. – *Siano soddisfatte le ipotesi di* I. *Allora l'unica soluzione limitata in* $\bar{Q}$ *della* (1.2) *è la soluzione nulla.*

II'. – *Esista,* $\forall\nu>0$, *una funzione* $\omega_\nu(z)$, *continua per* $z\in J$, *tale che sia*

$$z\omega_\nu(z)>0 \qquad \text{per} \quad z\neq 0, \tag{4.1}$$

e inoltre, per $|z|\leq\nu$, *risulti*

$$w\left\{f\left(x\,,t\,,z+w\,,\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)-f\left(x\,,t\,,z\,,\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)\right\} \geq w\omega_\nu(w). \tag{4.2}$$

Allora, se la (1.2) *ammette una soluzione limitata in* $\bar{Q}$, *questa è unica.*

Analogo risultato si ha se sono soddisfatte le ipotesi del teorema III *o dell'esempio* IV *rispettivamente nel caso in cui i coefficienti* a_{jk} *siano funzioni della sola* x *o siano costanti.*

Dimostriamo il teorema I'.

Come in I si verifica che $z(x\,,t)\equiv 0$ è soluzione della (1.2). Consideriamo ora un'altra soluzione $z(x\,,t)\not\equiv 0$ e dimostriamo che non può essere limitata in $\bar{Q}$. Ragioniamo per assurdo: ammettiamo che $z(x\,,t)$ sia limitata; posto ancora

$$\eta(t)=\max_{x\in\bar{\Omega}} z(x\,,t)\,,$$

$\eta(t)$ risulta ora funzione limitata e continua in J. Se esiste un punto $\bar{t}$ nel quale è $\eta(\bar{t})>0$, detto $\bar{\mathfrak{I}}\,(t_0<t\leq\bar{t})$ l'intorno sinistro più ampio possibile nel quale risulti $\eta(t)>0$, si dimostra, come nel § 2, che $\eta(t)$ è funzione decrescente in tutto l'intervallo $\bar{\mathfrak{I}}$. Ne segue ora, per la limitatezza di $\eta(t)$, che è $t_0 = -\infty$. Se infatti t_0 fosse finito, si avrebbe, per la continuità e decrescenza di $\eta(t)$,

$$\lim_{t \to t_0^+} \eta(t) = \eta(t_0) > 0$$

e l'intervallo $\bar{\mathfrak{I}}$ sarebbe ulteriormente ampliabile, contro l'ipotesi ammessa. Quindi $\eta(t)$, è funzione decrescente e positiva in tutto l'intervallo $-\infty < t \leq \bar{t}$.

Vale ancora, per $t < \bar{t}$, la (2.15): risulta cioè

$$\frac{\eta'(t)}{\omega(\eta(t))} \leq -1 .$$

Integrando fra $t < \bar{t}$ e $\bar{t}$, si ha:

$$\int_t^{\bar{t}} \frac{\eta'(t)\, dt}{\omega(\eta(t))} \leq -(\bar{t} - t),$$

da cui

$$\int_{\eta(\bar{t})}^{\eta(t)} \frac{d\eta}{\omega(\eta)} \geq \bar{t} - t. \tag{4.3}$$

Questa disuguaglianza è assurda se $\eta(t)$ è funzione limitata. Sarebbe infatti, in tale ipotesi,

$$\eta(t) \leq M$$

e quindi

$$\int_{\eta(\bar{t})}^{\eta(t)} \frac{d\eta}{\omega(\eta)} \leq \int_{\eta(\bar{t})}^{M} \frac{d\eta}{\omega(\eta)} < +\infty ,$$

mentre il secondo membro della (4.3) diverge a $+\infty$ per $t \to -\infty$.

In modo analogo si ragiona sulla funzione

$$\mu(t) = \min_{x \in \bar{\Omega}} z(x, t) .$$

Resta così provato che non vi è altra soluzione limitata in $\bar{Q}$ della (1.2), oltre la $z(x, t) = 0$.

Il teorema II' è una conseguenza del precedente.

Ammettiamo che esistano due soluzioni della (1.2) limitate in $\bar{Q}$. Siano $z_1(x, t)$ e $z_2(x, t)$. Posto ancora

$$\zeta(x, t) = z_1(x, t) - z_2(x, t),$$

ζ risulta soluzione dell'equazione (2.19).

Per la (4.1) e la (4.2), detto

$$\nu = \operatorname*{Sup}_{x, t \in \bar{Q}} |z_2(x, t)| ,$$

si ha, per $\zeta \neq 0$,

$$\zeta g(x, t, \zeta, 0) = \zeta \left\{ f\left(x, t, z_2 + \zeta, \frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right) - f\left(x, t, z_2, \frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right) \right\} \geq \zeta \omega_\nu(\zeta).$$

Quindi $g\left(x, t, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right)$ soddisfa alle ipotesi del teorema I′ e pertanto l'unica soluzione limitata della (2.19) è $\zeta(x, t) = 0$.

Analogamente, se sono soddisfatte le ipotesi del teorema III [4], detta $z(x, t)$ una soluzione limitata e posto ancora (cfr. (3.4) e (3.1))

$$z(x, t) = y(x, t)\, \varphi(x) \quad , \quad A\varphi + \lambda\varphi = 0, \tag{4.4}$$

$y(x, t)$ risulta soluzione dell'equazione (3.5), nella quale la funzione $h\left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x_i}\right)$ soddisfa le ipotesi del teorema II′. Dall'unicità della soluzione limitata della (3.5) segue allora, per la (4.4), l'unicità della soluzione limitata in $\overline{Q}$ della (1.2).

(4) Come nel teorema II′, l'ipotesi *b*) del teorema III può ora essere attenuata, ammettendo che esista, $\forall \mu > 0$, una funzione $\omega_\mu(z)$ soddisfacente la (4.1), tale che risulti, per $|z| \leq \mu$,

$$w \left\{ f\left(x, t, z + w, p_i + \frac{w}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) - f(x, t, z, p_i) \right\} \geq w\omega_\mu(w) - \lambda w^2.$$