Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Claudio Baiocchi

Sulle soluzioni del sistema di Navier-Stokes in dimensione n. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.3-4, p. 163–168.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_3-4_163_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulle soluzioni del sistema di Navier-Stokes in dimensione n.* Nota III di CLAUDIO BAIOCCHI, presentata [(*)] dal Corrisp. L. AMERIO.

RÉSUMÉ. — On étudie quelques propriétés de régularité dans la variable temporelle des solutions du système de Navier-Stokes en dimension n.

4. – L'EQUAZIONE IN « FORMA FORTE ». SUE CONSEGUENZE.

4.1. Indicherò in questo numero con k un qualsiasi numero reale con $k \geq \max\left(1, \frac{n}{2} - 1\right)$. Sotto opportune ipotesi sul termine noto f tradurrò l'equazione funzionale (1.3) in una equazione in $\mathcal{D}'(T_0, T_1; V_{-k})$.

Sia $f \in L^1(T_0, T_1; V_{-k})$; posto per ogni $\varphi \in \Phi$, $\langle f, \varphi \rangle = \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t), \varphi(t) \rangle_k \, dt$ si verifica facilmente che si è così definito un funzionale lineare continuo su Φ; si può cioè considerare $L^1(T_0, T_1; V_{-k}) \subset \Phi'$.

TEOREMA 4.1. – *Sia $f \in L^1(T_0, T_1; V_{-k})$ e sia u una soluzione debole del sistema di Navier-Stokes sull'intervallo $]T_0, T_1[$ relativa a tale f* [(7)]. *Si ha:*

$$\nu A u + B u + u' = f \quad \textit{nel senso di} \quad \mathcal{D}'(T_0, T_1; V_{-k}). \tag{4.1}$$

Dim. – Tratto separatamente i vari termini della (1.3). Per la (1.a) e la (3.13) è $Au \in L^2(T_0, T_1; V_{-k})$; ne segue:

$$\int_{T_0}^{T_1} \nu ((u, \varphi)) \, dt = \int_{T_0}^{T_1} \langle \nu A u, \varphi \rangle_k \, dt = \langle \nu A u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(T_0, T_1; V_{-k}), \mathcal{D}(T_0, T_1; V_k)}.$$

Per la (1.a) e la (3.11) con $\vartheta = \min(1, n/4)$ è $Bu \in L^1(T_0, T_1; V_{-k})$; ne segue:

$$\int_{T_0}^{T_1} b(u, \varphi, u) \, dt = \int_{T_0}^{T_1} \langle Bu, \varphi \rangle_k \, dt = \langle Bu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(T_0, T_1; V_{-k}), \mathcal{D}(T_0, T_1; V_k)}$$

Per la (1.a) è $u \in L^2(T_0, T_1; V_{-k})$; ne segue:

$$- \int_{T_0}^{T_1} (u, \varphi') \, dt = - \int_{T_0}^{T_1} \langle u, \varphi' \rangle_k \, dt = - \langle u, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'(T_0, T_1; V_{-k}), \mathcal{D}(T_0, T_1; V_k)} =$$
$$= \langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(T_0, T_1; V_{-k}), \mathcal{D}(T_0, T_1; V_k)}.$$

(*) Nella seduta del 22 giugno 1966.

(7) Nel senso della def. 1.1.

Tenendo conto della (1.3) e delle relazioni ottenute si ha:

$$\langle \nu A u + B u + u' - f , \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(T_0,T_1;V_{-k}),\mathcal{D}(T_0,T_1;V_k)} = 0 \qquad \forall \varphi \in \Phi$$

che, per la densità di Φ in $\mathcal{D}(T_0, T_1; V_k)$, dà la (4.1). *c. v. d.*

TEOREMA 4.2. – *Nelle ipotesi del teorema 4.1. si ha:*

$$u' \in L^1(T_0, T_1; V_{-k}) . \tag{4.2}$$

$$\nu A u(t) + B u(t) + u'(t) = f(t) \quad \text{in } V_{-k}, \quad \text{q. dov. in }]T_0, T_1[. \tag{4.3}$$

Dim. – Si è già osservato che, nelle ipotesi fatte, è $Au \in L^2(T_0, T_1; V_{-k})$, $Bu \in L^1(T_0, T_1; V_{-k})$; le (4.2), (4.3) seguono immediatamente dalla (4.1). *c. v. d.*

Osservazione 4.1. – Nel caso in cui sia $f \in L^1(T_0, T_1; V_{-k})$, combinando le relazioni (4.3) e (3.14) si ha:

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \operatorname{grad}) u + u' = f \quad \text{in } V_{-k} \quad \text{q. dov. in }]T_0, T_1[. \tag{4.4}$$

Tale relazione, se u ed f sono « abbastanza regolari », equivale alla (1) dell'introduzione.

4.2. Cercherò ora alcune proprietà delle soluzioni limitate del problema di Navier–Stokes. Dal lemma 3.2 e dalla (4.3) con $k = n/2$ si ha:

(4.5) *Se $f \in L^2(T_0, T_1; V_{-n/2})$ ogni soluzione limitata del sistema di Navier–Stokes relativa a tale f sull'intervallo $]T_0, T_1[$ verifica:*

$$u' \in L^2(T_0, T_1; V_{-n/2}) .$$

Osservazione 4.2. – Si prenda $\mathcal{V}_{n/2} =$ aderenza di $\mathcal{D}_d$ in $H^{n/2}$; $\mathcal{V}_{-n/2} = (\mathcal{V}_{n/2})'$; Lions [10] ha dimostrato che, se $f \in L^2(T_0, T_1; H)$ è $u' \in L^2(T_0, T_1; \mathcal{V}_{-n/2})$, relazione molto simile alla (4.5). Combinando la (4.5) con la (1.a) si ha (cfr. Lions [6]) $u \in C^0([T_0, T_1]; [V, V_{-n/2}]_{1/2}) = C^0([T_0, T_1]; V_{-(n/2)+1})$ per la (2.5); in particolare per $n = 2$ si riottiene $u \in C^0([T_0, T_1]; H)$, risultato noto per altra via, sia per le soluzioni del problema di Cauchy (cfr. Lions [10], [9], Lions–Prodi [13], Prodi [16]) sia per le soluzioni periodiche (cfr. Prodi [16]).

TEOREMA 4.3. – *Se $f \in L^2(T_0, T_1; V_{-n/2})$ ogni soluzione limitata del sistema di Navier–Stokes verifica:*

$$u \in H^{2/(n+2)}(T_0, T_1; H) . \tag{4.6}$$

Dim. – Si ha infatti, per le (1.a), (4.5), (3.7) e (2.5): $u \in L^2(T_0, T_1; V) \cap H^1(T_0, T_1; V_{-n/2}) \subset H^{2/(n+2)}(T_0, T_1; [V, V_{-n/2}]_{2/(n+2)}) = H^{2/(n+2)}(T_0, T_1; H)$. *c. v. d.*

Per le relazioni tra risultati noti ed il teorema 4.3 cfr. la successiva Osservazione 4.3.

4.3. Voglio ora ottenere per le soluzioni non limitate un risultato analogo a quello del teorema 4.3. Bisogna qui distinguere i due casi: $n \geq 4$ ed $n < 4$.

TEOREMA 4.4. – *Sia $n \geq 4$. Sia $f \in L^1(T_0, T_1; V_{1-(n/2)})$ e sia u soluzione debole del sistema di Navier–Stokes relativa a tale f. Si ha:*

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \qquad u \in H^{(1/n)-\varepsilon}(T_0, T_1; H) . \tag{4.7}$$

Dim. – Essendo $n \geq 4$ si può prendere nella (4.2) $k = \frac{n}{2} - 1$; con tale scelta di k la (4.2) e la (1.a) dànno (cfr. anche (3.8) e (2.5)): $u \in L^2(T_0, T_1; V) \cap W^{1,1}(T_0, T_1; V_{1-(n/2)}) \subset H^{(1/n)-\varepsilon}(T_0, T_1; [V, V_{1-(n/2)}]_{2/n}) = H^{(1/n)-\varepsilon}(T_0, T_1; H)$ relazione valida per ogni $\varepsilon > 0$. *c. v. d.*

Se $n < 4$ nella (4.2) non si può prendere $k = \frac{n}{2} - 1$; per ottenere ancora una formula del tipo della (4.7) premetto un lemma:

LEMMA 4.1. – *Sia* $n < 4$, $f \in L^{\frac{2n}{3n-4} - \varepsilon}(T_0, T_1; V')$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ *sufficientemente piccolo; sia u soluzione del sistema di Navier-Stokes relativa a tale f; se* $u \in H^{\beta}(T_0, T_1; H)$ *con* $0 < \beta < \frac{1}{n}$ *è* $u \in H^{\frac{1+\beta(4-n)}{4}}(T_0, T_1; H)$.

Dim. – Per la (3.3) è $u \in L^q(T_0, T_1; H)$ con $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \beta$; è applicabile il lemma 3.1 con tale scelta di q grazie all'ipotesi su f ed alla (4.2) con $k = 1$; si ottiene $u' \in L^{\frac{2}{2-\beta(4-n)}}(T_0, T_1; V')$; per la (3.7) con $p = \frac{2}{2-\beta(4-n)}$ e la (2.5) si ha il lemma. *c. v. d.*

TEOREMA 4.5. – *Sia* $n < 4$, $f \in L^{\frac{2n}{3n-4} - \varepsilon}(T_0, T_1; V')$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ *sufficientemente piccolo; sia u soluzione debole del sistema di Navier-Stokes sull'intervallo* $]T_0, T_1[$ *relativa a tale f; si ha:*

(4.8) *per ogni* $\varepsilon > 0$ $\quad u \in H^{(1/n)-\varepsilon}(T_0, T_1; H)$.

Dim. – Si applichi il lemma 4.1 con $\beta = 0$ (il lemma è stato dimostrato per $\beta > 0$ ma « a meno di ε » vale anche per $\beta = 0$); si ottiene $u \in H^{(1/4)-\varepsilon}(T_0, T_1; H)$. Sia β_0 generico con $0 < \beta_0 < 1/4$; si può ancora applicare il lemma con $\beta = \beta_0$ e si ottiene $u \in H^{\beta_1}(T_0, T_1; H)$ con $\beta_1 = \frac{1 + \beta_0(4-n)}{4}$; procedendo così indefinitamente si ottiene la successione di proposizioni: $u \in H^{\beta_m}(T_0, T_1; H)$ dove $\beta_{m+1} = \frac{1+\beta_m(4-n)}{4}$ (si osservi che si ha, per induzione, $0 < \beta_m < \beta_{m+1} < 1/n$; il lemma è perciò riapplicabile ogni volta). Detto β il limite della successione (monotona limitata) $\{\beta_m\}$ si ha

$$\beta = \lim_{m \to \infty} \beta_m = \lim_{m \to \infty} \beta_{m+1} = \lim_{m \to \infty} \frac{1+\beta_m(4-n)}{4} = \frac{1+\beta(4-n)}{4}$$

da cui, risolvendo in β, $\beta = 1/n$. Ne segue ovviamente la (4.8). *c. v. d.*

Osservazione 4.3. – Lions [8] ha dimostrato che, per $n \leq 4$ e per $f \in L^2(T_0, T_1; H)$ esiste almeno una u soluzione limitata del problema di Cauchy per il sistema di Navier-Stokes tale che $u \in H^{(1/4)-\varepsilon}(T_0, T_1; H)$ per ogni $\varepsilon > 0$. I teoremi 4.3, 4.4 e 4.5 migliorano le ipotesi su f, l'« ordine di derivazione » di u e assicurano che tale relazione è conseguenza dell'impostazione stessa del problema per ogni sua soluzione.

4.4. – Voglio ora estendere al caso di n generico alcuni risultati noti per $n=3$ (cfr. Prodi [17]). In tutto questo numero supporrò $f \in L^2(T_0, T_1; V_{-n/2})$ e indicherò con u una generica soluzione limitata del sistema di Navier-Stokes sull'intervallo $]T_0, T_1[$ relativa a tale f.

TEOREMA 4.6. – *u è debolmente continua a valori in* H.

Dim. – Sia $h \in H$ generico; debbo dimostrare che la funzione $t \to (u(t), h)$ è continua. Si fissi $\varepsilon > 0$ e sia $w \in V_{n/2}$ tale che $|h - w| < \dfrac{\varepsilon}{4\|u\|_{L^\infty(T_0,T_1;H)}}$ (se $\|u\|_{L^\infty(T_0,T_1;H)} = 0$ il teorema è ovvio). Si avrà:

$$|(u(t+\delta), h) - (u(t), h)| \leq |(u(t+\delta) - u(t), w)| + |(u(t+\delta), h - w)| +$$
$$+ |(u(t), h - w)| \leq |\langle u(t+\delta) - u(t), w\rangle_{n/2}| + 2\|u\|_{L^\infty(T_0,T_1;H)} \cdot |h - w| \leq$$

$\Big($il passaggio è lecito perchè per la (4.3) con $k = \frac{n}{2}$ è $u \in W^{1,1}(T_0, T_1; V_{-n/2})\Big) \leq$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_t^{t+\delta} \langle u'(\tau), w\rangle_{n/2}\, d\tau\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_t^{t+\delta} \|u'(\tau)\|_{V_{-n/2}} \|w\|_{V_{n/2}}\, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|w\|_{V_{n/2}} \cdot \left(\left|\int_t^{t+\delta} \|u'(\tau)\|^2_{V_{-n/2}}\, d\tau\right|\right)^{1/2} \sqrt{|\delta|} < \varepsilon$$

per $|\delta|$ sufficientemente piccolo, grazie alla (4.5). *c. v. d.*

Osservazione 4.4. – Per $n = 2$ si ha, direttamente dalle (1.a), (4.5), $u \in C^0([T_0, T_1]; H)$ (cfr. Osservazione 4.2). Per $n = 3$ il risultato è noto (per $f \in L^2(T_0, T_1; H)$); cfr. Prodi [18]; per $n > 3$ non mi risulta esplicitamente osservato.

Si osservi che, se $\varphi \in L^2(T_0, T_1; V_{n/2})$ moltiplicando (scalarmente tra $V_{-n/2}$ e $V_{n/2}$, quasi ovunque rispetto a t) ambo i membri della (4.3) (scritta per $k = n/2$) per $\varphi(t)$ e integrando tra t_0 e t_1 con $T_0 \leq t_0 < t_1 \leq T_1$ si ha:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\langle u'(t), \varphi(t)\rangle_{n/2} + \nu((u(t), \varphi(t))) + b(u(t), \varphi(t), u(t))]\, dt = \tag{4.9}$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \langle f(t), \varphi(t)\rangle_{n/2}\, dt\,.$$

Inoltre se $\varphi' \in L^1(T_0, T_1; H)$ si ha (per passaggio al limite sulle funzioni regolari; con $(u(t), h)$ per t fissato in $]T_0, T_1[$ e $h \in H$ intendo il valore di (u, h) nel punto t nel senso del teorema 4.6):

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle u', \varphi\rangle_{n/2}\, dt = (u(t_1), \varphi(t_1)) - (u(t_0), \varphi(t_0)) - \int_{t_0}^{t_1} (u(t), \varphi'(t))\, dt\,;$$

ne segue:

TEOREMA 4.7. – *Se* $\varphi \in L^2(T_0, T_1; V_{n/2})$, $\varphi' \in L^1(T_0, T_1; H)$ *si ha:*

$$(4.10)\qquad (u(t_1), \varphi(t_1)) - (u(t_0), \varphi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} [\nu((u(t), \varphi(t))) + b(u(t), \varphi(t), u(t)) -$$

$$- (u(t), \varphi'(t))]\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle f(t), \varphi(t)\rangle_{n/2}\, dt \qquad T_0 \leq t_0 < t_1 \leq T_1 .$$

Osservazione 4.5. – Anche la (4.10) è nota per $n = 2$ e 3 e per $f \in L^2(T_0, T_1; H)$ (come conseguenza di una equazione più particolare della (1.3)); cfr. Prodi [17]. Con la (4.10) (grazie anche all'osservazione 4.1) si giustifica la definizione 1.2 osservando che, imponendo ulteriori condizioni a φ, il confronto tra le (1.3) e (4.10) permette di impostare i problemi di Cauchy, periodico etc. per il sistema di Navier–Stokes nella forma usuale (cfr. Lions [8], [10], Prodi [16], [17], [18], Prouse [19]).

Si osservi che la (4.9) può essere trasformata in una relazione analoga alla (4.10) anche se $\varphi' \in L^2(T_0, T_1; V')$; si ottiene allora la relazione:

$$(4.11)\qquad \begin{cases} \textit{Se } \varphi \in L^2(T_0, T_1; V_{n/2}),\ \varphi' \in L^2(T_0, T_1; V') \textit{ si ha:} \\ (u(t_1), \varphi(t_1)) - (u(t_0), \varphi(t_0)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} [\nu((u(t), \varphi(t))) + b(u(t), \varphi(t), u(t)) - \\ - \langle u'(t), \varphi(t)\rangle_{n/2}]\, dt = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \langle f(t), \varphi(t)\rangle_{n/2}\, dt \qquad T_0 \leq t_0 < t_1 \leq T_1 . \end{cases}$$

In particolare per $n = 2$ si può prendere $\varphi \equiv u$; combinando le (4.9), (4.11) e la relazione $b(v, v, v) = 0$ si ottiene:

$$(4.12)\qquad \text{per } n = 2 \qquad |u(t_1)|^2 - |u(t_0)|^2 + \int_{t_0}^{t_1} 2\nu \|u(t)\|^2\, dt = \int_{t_0}^{t_1} 2\langle f(t), u(t)\rangle\, dt$$

relazione già nota (cfr. Prodi [16]), che rappresenta *la relazione dell'energia*. Per $n = 3$ o 4 ha ancora senso moltiplicare (scalarmente tra V' e V, quasi ovunque in $]T_0, T_1[$) ambo i membri della (4.3) per $u(t)$ e si ottiene:

$$(4.13)\qquad \begin{cases} \textit{Sia } n = 3 \textit{ o } 4;\ \textit{sia } f \in L^2(T_0, T_1; V'). \textit{ Si ha:} \\ \langle u'(t), u(t)\rangle \in L^1(T_0, T_1);\ \textit{e inoltre per } T_0 \leq t_0 < t_1 \leq T_1 : \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \langle u'(t), u(t)\rangle\, dt + \nu \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle f(t), u(t)\rangle\, dt . \end{cases}$$

Non essendo però $u' \in L^2(T_0, T_1; V')$ non si può (almeno con tale metodo dimostrativo) sostituire $\int_{t_0}^{t_1} \langle u'(t), u(t) \rangle \, dt$ con $\frac{1}{2}[|u(t_1)|^2 - |u(t_0)|^2]$ (espressione tra l'altro priva di senso perché non si sa se $u \in C^0([T_0, T_1]; H))$ e quindi la (4.13) non è sufficiente ad assicurare la relazione dell'energia.

BIBLIOGRAFIA.

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS e L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary* ..., II. «Comm. P. A. Math.», *17*, 35–92 (1964).

[2] L. CATTABRIGA, *Su un problema al contorno* ..., «Rendiconti Sem. Mat. Padova», *31*, 1–33 (1961).

[3] G. GEYMONAT e P. GRISVARD (in preparazione).

[4] A. A. KISELEV e O. A. LADYZENSKAJA, *Sull'esistenza e l'unicità della soluzione del problema non stazionario per un liquido viscoso incompressibile*, «Isvestia Akad. Nauk», *21*, 655–680 (1957).

[5] O. A. LADYZENSKAJA, *Soluzione in grande del problema al contorno* ..., «Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.», *123*, 427–429 (1958).

[6] J. L. LIONS, *Espaces intermédiaires entre espaces de Hilbert et applications*, «Bull. Math. R.P.R. Bucarest», *2*, 419–432 (1958).

[7] J. L. LIONS, *Quelques procédés d'interpolation des opérateurs linéaires et quelques applications*, Sém. Schwartz, 1961–62. Paris.

[8] J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationnelles*, Springer, collection jaune, band 111.

[9] J. L. LIONS, *Sur la régularité et l'unicité des solutions turbolentes des equations de Navier–Stokes*, «Rend. Sem. Mat. Padova», *30*, 16–23 (1960).

[10] J. L. LIONS, *Une remarque sur certains problèmes différentielles non linéaires*, «C.R. Acad. Sc. Paris», *252*, 657–659 (1961).

[11] J. L. LIONS e E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, III. «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa», *15*, 39–101 (1961); IV. «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa», *15*, 311–326 (1961).

[12] J. L. LIONS e J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Pubbl. I.H.E.S. N° 19.

[13] J. L. LIONS e G. PRODI, *Un théorème d'existence et unicité pour les équations de Navier–Stokes en dimension 2*, «C.R. Acad. Sc. Paris», *248*, 3519–3521 (1959).

[14] E. MAGENES, *Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali*, Atti del VIII Congresso U.M.I., ediz. Cremonese.

[15] S. M. NIKOLSKIJ, *On imbedding, continuation* ... (in russo) «Uspeki Mat.», XVI, pp. 63–114; tradotto in inglese nel «Russian Mathematical Surveys», vol. 16, N° 5, pp. 55–104.

[16] G. PRODI, *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier–Stokes nel caso bidimensionale*, «Rend. Sem. Mat. Padova», *30*, 1–16 (1960).

[17] G. PRODI, *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes*, «Ann. Mat. pura e appl.», *48*, 173–182 (1959).

[18] G. PRODI, *Résultats récents et problèmes anciens* ..., Coll. intern. du C.N.R.S. du 1962, C. ed. Dunod.

[19] G. PROUSE, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Navier–Stokes*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *35* (1963).

[20] F. RIESZ e S. G. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Akad. Kiado, Budapest 1952.

[21] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, tomi I° e II°. C. ed. Hermann, Paris.

[22] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, I° e II°, «Annales de l'Institut Fourier», *7*, 1–139 (1957) e *8*, 1–209 (1958).