Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Claudio Baiocchi

Sulle soluzioni del sistema di Navier-Stokes in dimensione n. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.1-2, p. 41–46.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_1-2_41_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Analisi matematica. — *Sulle soluzioni del sistema di Navier-Stokes in dimensione n.* Nota II di CLAUDIO BAIOCCHI, presentata (*) dal Corrisp. L. AMERIO.

RÉSUMÉ. — On étudie quelques propriétés de regularité dans la variable temporelle des solutions du système de Navier-Stokes en dimension n.

2. – GLI SPAZI V_α; LORO PROPRIETÀ.

2.1 Ricordo che se sono assegnati due spazi di Hilbert, $\mathcal{V}$ ed $\mathcal{H}$, con $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ (4) e $\mathcal{V}$ denso in $\mathcal{H}$, identificando $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{H}'$ si può immergere $\mathcal{H}$ in $\mathcal{V}'$ ottenendo così le relazioni $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$, ogni spazio essendo denso nel successivo. Inoltre si avrà, per definizione di immersione di $\mathcal{H}$ in $\mathcal{V}'$:

$$(2.1) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \quad , \quad \forall h \in \mathcal{H} \quad , \quad \langle h , v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = (h , v)_{\mathcal{H}} .$$

Farò uso dell'interpolazione tra spazi di Hilbert; con $[\mathcal{V} , \mathcal{H}]_\vartheta$ indicherò l'interpolato tra $\mathcal{V}$ ed $\mathcal{H}$ di indice ϑ ad esempio col metodo di Lions [6] (5).

2.2 Sia $\{\lambda_j\}_{j=1,2,\dots}$ una successione non decrescente di numeri reali positivi che supporrò fissata una volta per tutte. Per ogni α reale indicherò con l_α^2 lo spazio delle successioni $\{a_i\}_{i=1,2,\dots}$ di numeri reali tali che $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \lambda_j^\alpha < +\infty$; rispetto al prodotto scalare $(\{a_i\} , \{b_i\})_{l_\alpha^2} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, b_j \, \lambda_j^\alpha$ l_α^2 risulta uno spazio di Hilbert. Si ha evidentemente, per α e β reali con $\alpha > \beta$, $l_\alpha^2 \subset l_\beta^2$ e l_α^2 denso in l_β^2; identificando l_0^2 al suo duale si ha poi (nel senso precisato al N° 2.1) $(l_\alpha^2)' \cong l_{-\alpha}^2$; inoltre è di immediata verifica che si ha:

$$(2.2) \qquad \forall \alpha , \beta \textit{ reali} \quad , \quad \forall \vartheta \in [0 , 1] \qquad [l_\alpha^2 , l_\beta^2]_\vartheta \cong l_{\alpha(1-\vartheta)+\beta\vartheta}^2 .$$

2.3. Nelle ipotesi fatte su Ω l'immersione di $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è compatta (cfr. ad esempio Nikolskij [15]); ne segue ovviamente che è compatta anche l'immersione di V in H. Per noti risultati di teoria spettrale (cfr. ad esempio Riesz-Nagy [20]) si potrà allora trovare una successione di numeri reali (che risulteranno positivi e che posso supporre non decrescenti) $\{\lambda_j\}_{j=1,2,\dots}$

(*) Nella seduta del 22 giugno 1966.

(4) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ significa che $\mathcal{A}$ è contenuto algebricamente in $\mathcal{B}$ con immersione continua; $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ (ovvero $\mathcal{A} = \mathcal{B}$) significa $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

(5) E in effetti i vari metodi di interpolazione vengono in tal caso a coincidere (cfr. LIONS [7]); in particolare si potranno sfruttare per tali spazi proprietà dimostrate in LIONS-PEETRE [12] per l'interpolazione col metodo delle medie.

ed una successione $\{\omega_j\}_{j=1,2,\ldots}$ di elementi di V tali che:

(2.3) $$((\omega_j, v)) = \lambda_j(\omega_j, v) \ \forall v \in V$$

(2.4) $$\{\omega_j\} \ \textit{è una base in } V \textit{ ed in } H.$$

Supporrò inoltre di aver ortonormalizzato in H la successione $\{\omega_j\}$; le (2.3), (2.4) continueranno ovviamente a valere.

Supporrò senz'altro fissata in tal modo la successione $\{\lambda_j\}$ di cui al N° 2.2.

DEFINIZIONE 2.1. – *Per ogni* α *reale* ≥ 0 *indicherò con* V_α *lo spazio:*

$$\{h \in H ; \{(h, \omega_j)\} \in l^2_\alpha\} \quad ; \quad (h, k)_{V_\alpha} = (\{(h, \omega_j)\}, \{(k, \omega_j)\})_{l^2_\alpha}.$$

Si ha evidentemente $V_\alpha \cong l^2_\alpha$; V_α denso in V_0; identificherò V_0 al suo duale e porrò (nel senso precisato al N° 2.1):

DEFINIZIONE 2.2. – *Per ogni* $\alpha < 0$ $V_\alpha = (V_{-\alpha})'$.

Si avrà allora $V_\alpha = l^2_\alpha$ per ogni α reale; e poiché le proprietà di interpolazione sono invarianti per isomorfismi la (2.2) dà:

(2.5) $$\forall \alpha, \beta \ \textit{reali} \quad , \quad \forall \vartheta \in [0, 1] \qquad [V_\alpha, V_\beta]_\vartheta \cong V_{\alpha(1-\vartheta)+\beta\vartheta}.$$

2.4. Voglio studiare alcune proprietà degli spazi ora introdotti. Anzitutto si ha ovviamente $V \cong V_1$; $H \cong V_0$; d'ora in poi scriverò perciò indifferentemente V o V_1, H o V_0.

Sia ora $\alpha \geq 0$ e sia $v \in V_{\alpha+2}$. Posto $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (v, \omega_j)\, \omega_j$ si avrà:

$$\|f\|^2_{V_\alpha} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha (f, \omega_j)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\alpha+2} (v, \omega_j)^2 = \|v\|^2_{V_{\alpha+2}}.$$

Viceversa, se $f \in V_\alpha$, posto $v = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f, \omega_j)}{\lambda_j} \omega_j$, si ha:

$$\|v\|^2_{V_{\alpha+2}} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\alpha+2} \left[\frac{(f, \omega_j)}{\lambda_j}\right]^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha (f, \omega_j)^2 = \|f\|^2_{V_\alpha}.$$

Si osservi anche che si avrà $((v, \omega_j)) = \lambda_j (v, \omega_j) = (f, \omega_j)$; ne segue, per la (2.4):

(2.6) $$\begin{cases} V_{\alpha+2} = \{v \in V_1 ; \exists f \in V_\alpha ; ((v, w)) = (f, w) \ \forall w \in V\}; \\ v \to f \ \textit{è un isomorfismo suriettivo di } V_{\alpha+2} \textit{ su } V_\alpha. \end{cases}$$

LEMMA 2.1. – *Per ogni* k *intero* ≥ 0 $V_{2k+1} \subset \{H^{2k+1}(\Omega)\}^n$.

Dim. – Procedo per induzione; essendo $V_1 = V$ la proprietà è vera per $k = 0$. Supposta vera la proprietà per $k = r - 1$ sia $v \in V_{2r+1}$; per la (2.6) esisterà $f \in V_{2r-1}$ tale che $\forall w \in V$, $((v, w)) = (f, w)$; e, per l'ipotesi di induzione sarà $f \in \{H^{2r-1}(\Omega)\}^n$.

Si osservi ora che la relazione data dalla (2.6) Iª equivale a dire che esiste $p(x) \in L^2(\Omega)$ tale che:

$$(2.7) \qquad \begin{cases} -\Delta v + \operatorname{grad} p = f \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v \in \{H_0^1(\Omega)\}^n \end{cases}$$

(le ultime due relazioni esprimono che $v \in V_1 = V$). Dalla (2.7), essendo $f \in H^{2r-1}$ per l'ipotesi di induzione, si ricava $v \in H^{2r+1}$ (6); inoltre è: $\|v\|_{H^{2r+1}} \leq \leq C_r \|f\|_{H^{2r-1}} \leq$ (per l'ipotesi di induzione) $C_r \|f\|_{V_{2r-1}} =$ (per la (2.6)) $C_r \|v\|_{V_{2r+1}}$ (con C_r ho indicato una opportuna costante che dipende da r, Ω, n ma non da f e da v). *c. v. d.*

TEOREMA 2.1. – *Per ogni α reale* ≥ 0 $V_\alpha \subset \{H^\alpha(\Omega)\}^n$.

Dim. – Sia α^* il minimo intero dispari più grande di α; si ha $V_{\alpha^*} \subset H^{\alpha^*}$ per il lemma 2.1; $V_0 = H \subset L^2$; ne segue, per la (2.5):

$$V_\alpha = [V_{\alpha^*}, V_0]_{(\alpha^*-\alpha)/\alpha^*} \subset [H^{\alpha^*}, L^2]_{(\alpha^*-\alpha)/\alpha^*} = \text{(cfr. Lions-Peetre[12] teor. 4.1 cap. I)}$$
$$= \{[H^{\alpha^*}(\Omega), L^2(\Omega)]_{(\alpha^*-\alpha)/\alpha^*}\}^n = \text{(cfr. Lions-Magenes[11])} \{H^\alpha(\Omega)\}^n \qquad c.\,v.\,d.$$

Osservazione 2.1. – In tutto quanto segue, alla famiglia $\{V_\alpha\}$ potrebbe essere sostituita una qualunque famiglia $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ tale che

$$\mathcal{V}_0 = H \quad ; \quad \mathcal{V}_1 = V \quad ; \quad \mathcal{V}_\alpha \subset H^\alpha \quad ; \quad [\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_\vartheta = \mathcal{V}_{\alpha(1-\vartheta)+\beta\vartheta}$$

(le ultime due proprietà servono anzi solo per opportuni valori degli indici). In un primo momento avevo cercato di dimostrare che una tale famiglia era data da $\mathcal{V}_\alpha =$ aderenza di $\mathcal{D}_d$ in $\{H^\alpha(\Omega)\}^n$ (cfr. per una scelta analoga Lions [10]); risultavano allora banali le prime tre proprietà, ma non sono riuscito a dimostrare la quarta. Se effettivamente si potesse effettuare una tale scelta della famiglia $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ alcune considerazioni che svolgerò in seguito (cfr. N° 3.4 ed Osservazione 4.1) cesserebbero di avere valore formale e diverrebbero rigorose.

L'idea di scegliere come famiglia $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ la famiglia $\{V_\alpha\}$ mi è stata suggerita dal prof. Prodi.

Osservazione 2.2. – L'ipotesi di limitatezza di Ω non interviene in modo essenziale; infatti se Ω non fosse limitato basterebbe sostituire alla decomposizione spettrale « discreta » dell'immersione di V in H una decomposizione spettrale « continua » (cfr. sempre Riesz-Nagy [20]); agli spazi « discreti » l_α^2 andrebbero sostituiti analoghi spazi « continui » del tipo L_α^2 (funzioni di quadrato sommabile rispetto alla potenza $\alpha/2$ di una misura opportuna).

(6) E infatti si può verificare (in modo ovvio per $n = 2$; cfr. CATTABRIGA [2] per $n = 3$; cfr. GEYMONAT-GRISVARD [3] per n generico) che il sistema $\begin{cases} -\Delta v + \operatorname{grad} p = f \\ \operatorname{div} v = \varphi \end{cases}$ è ellittico secondo Douglis e Nirenberg; e il problema di Dirichlet verifica la condizione complementare di AGMON-DOUGLIS-NIREMBERG [1]; le proprietà di regolarità volute su v (e analoghe su p) seguono allora appunto dai risultati di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [1].

3. – Richiami su alcune maggiorazioni.

3.1. Riunisco in questo numero alcune proprietà di inclusione tra spazi del tipo di Sobolev; alcune delle proprietà che richiamerò potrebbero essere notevolmente generalizzate; io le esporrò solo nella forma che mi servirà in seguito. Anzitutto si ha che la (1.1) è largamente sufficiente ad assicurare le «inclusioni di Sobolev» (cfr. ad esempio Nikolskij [15]); ne segue:

$$(3.1) \qquad \textit{Se} \quad \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n} > 0 \qquad H^{\alpha}(\Omega) \subset L^{q}(\Omega) \qquad \textit{con} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n}.$$

$$(3.2) \qquad \textit{Se} \quad \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n} < 0 \qquad H^{\alpha}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega).$$

Inoltre, se B è uno spazio di Banach, si ha per le «inclusioni di Sobolev vettoriali» (cfr. ad esempio Nikolskij [15]):

$$(3.3) \qquad \textit{Se} \quad \frac{1}{2} - \alpha > 0 \qquad H^{\alpha}(T_0, T_1; \mathcal{B}) \subset L^{q}(T_0, T_1; \mathcal{B}) \quad \textit{con} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \alpha.$$

$$(3.4) \qquad \textit{Se} \quad \frac{1}{2} - \alpha < 0 \qquad H^{\alpha}(T_0, T_1; \mathcal{B}) \subset L^{\infty}(T_0, T_1; \mathcal{B}).$$

$$(3.5) \qquad \textit{Se} \quad 1 < p \leq 2 \qquad W^{1,p}(T_0, T_1; \mathcal{B}) \subset H^{(3/2)-(1/p)}(T_0, T_1; \mathcal{B})$$

$$(3.6) \qquad \textit{Per ogni} \ \varepsilon > 0 \qquad W^{1,1}(T_0, T_1; \mathcal{B}) \subset H^{(1/2)-\varepsilon}(T_0, T_1; \mathcal{B})$$

(la (3.6) non mi risulta esplicitamente osservata; ma può essere facilmente ottenuta nel modo seguente: si verifica che $\mathcal{D}([T_0, T_1]; \mathcal{B})$ è denso in $W^{1,1}(T_0, T_1; \mathcal{B})$; per mezzo di un opportuno operatore di «prolungamento» a $\mathbf{R}^1$ delle funzioni definite in $[T_0, T_1]$ si può allora supporre $T_0 = -\infty$; $T_1 = +\infty$; se $\varphi(t) \in W^{1,1}(-\infty, +\infty; \mathcal{B})$ indicando con $\hat{\varphi}(\tau)$ la trasformata di Fourier di $\varphi(t)$ si avrà $\hat{\varphi}(\tau) \in L^{\infty}(-\infty, +\infty; \mathcal{B})$; $i\tau \cdot \hat{\varphi}(\tau) \in L^{\infty}(-\infty, +\infty; \mathcal{B})$; da cui $(1+\tau^2)\|\hat{\varphi}(\tau)\|^2_{\mathcal{B}} \in L^{\infty}(-\infty, +\infty)$; e quindi $(1+\tau^2)^{(1/2)-\varepsilon}\|\hat{\varphi}(\tau)\|^2_{\mathcal{B}} \in L^1(-\infty, +\infty)$ per ogni $\varepsilon > 0$, cioè $\varphi \in H^{(1/2)-\varepsilon}(-\infty, +\infty; \mathcal{B})$; per restrizione a $]T_0, T_1[$ si ha la (3.6)).

Si osservi anche che, se $\mathcal{V}$ ed $\mathcal{H}$ verificano le ipotesi del N° 2.1 sarà:

$$(3.7) \quad L^2(T_0, T_1; \mathcal{V}) \cap W^{1,p}(T_0, T_1; \mathcal{H}) \subset H^{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{p}\right)\vartheta}(T_0, T_1; [\mathcal{V}, \mathcal{H}]_{\vartheta}) \ \forall \vartheta \in]0,1[.$$

Per avere la (3.7) si può procedere così: applicando la (3.5) e la relazione $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset [\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\vartheta}$ basterà dimostrare che $[L^2(T_0, T_1; \vartheta), H^{\alpha}(T_0, T_1; \mathcal{H})]_{\vartheta} = H^{\alpha\vartheta}(T_0, T_1; [\mathcal{V}, \mathcal{H}]_{\vartheta})$; e tale relazione segue dai risultati di Lions [6] (anche qui con prolungamenti e restrizioni del tipo indicato precedentemente; cfr. appunto Lions [6]).

Analogamente (basta sfruttare la (3.6) anzichè la (3.5)) si dimostra che

$$(3.8) \quad L^2(T_0, T_1; \mathcal{V}) \cap W^{1,1}(T_0, T_1; \mathcal{H}) \subset H^{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{p} - \varepsilon\right)\vartheta}(T_0, T_1; [\mathcal{V}, \mathcal{H}]_{\vartheta}) \ \forall \varepsilon > 0.$$

3.2. Sia k un numero reale positivo; indicherò con $\langle\, ,\rangle_k$ la dualità tra V_{-k} e V_k; $\langle\, ,\rangle_1$ sarà anche notato $\langle\, ,\rangle$. Si osservi che, per la (2.1) con $\mathcal{V} = V_k$ ed $\mathcal{H} = H$ si avrà $(h\,,v) = \langle h\,,v\rangle_k \;\forall h \in H\;,\;\forall v \in V_k$; sfrutterò spesso tale relazione senza più richiamarla.

Sia $\varphi \in V_n$ e sia ϑ reale tale che $0 < \vartheta \leq \min(1\,,n/4)$; per la (3.1) si avrà: $\|\varphi\|_{L^{(2n)/(n-\vartheta)}} \leq C_\vartheta \|\varphi\|_{H^\vartheta} \leq$ (cfr. Lions [6]: è $H^\vartheta = [H^1\,,L^2]_{1-\vartheta}) \leq$ $\leq C_\vartheta \|\varphi\|_{L^2}^{1-\vartheta} \|\varphi\|_{H^1}^{\vartheta} \leq C_\vartheta |\varphi|^{1-\vartheta} \|\varphi\|^\vartheta$; sempre per la (3.1), sfruttando anche la relazione $D_i : H^{1+(n/2)-2\vartheta}(\Omega) \to H^{(n/2)-2\vartheta}(\Omega)$ è lineare continua (cfr. Lions-Magenes[11] III prop. 11.1) si avrà: $\sum_{i,j=1}^{n} \|D_i \varphi_i\|_{L^{n/2\vartheta}(\Omega)} \leq C_\vartheta \sum_{i,j=1}^{n} \|D_i \varphi_j\|_{H^{(n/2)-2\vartheta}(\Omega)} \leq$ $\leq C_\vartheta \|\varphi\|_{H^{1+(n/2)-2\vartheta}} \leq$ (per il teorema 2.1) $C_\vartheta \|\varphi\|_{V_{1+(n/2)-2\vartheta}}$.

Ne segue, per $u\,,\varphi \in V_n$:

$$|b(u\,,\varphi\,,u)| \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} |u_i|\,|D_i \varphi_j|\,|u_j|\,dx \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega |u_i|^{\frac{2n}{n-2\vartheta}} dx\right)^{\frac{n-2\vartheta}{2n}} \cdot \left(\int_\Omega |D_i \varphi_j|^{\frac{n}{2\vartheta}} dx\right)^{\frac{2\vartheta}{n}} \cdot \left(\int_\Omega |u_j|^{\frac{2n}{n-2\vartheta}} dx\right)^{\frac{n-2\vartheta}{2n}} \leq$$

$$\leq C_\vartheta \|u\|^\vartheta \cdot |u|^{1-\vartheta} \cdot \|\varphi\|_{V_{1+(n/2)-2\vartheta}} \|u\|^\vartheta\, |u|^{1-\vartheta} = C_\vartheta \|u\|^{2\vartheta} \cdot |u|^{2-2\vartheta} \cdot \|\varphi\|_{V_{1+(n/2)-2\vartheta}}\,.$$

Ne segue, per la densità di V_n in V ed in $V_{1+(n/2)-2\vartheta}$:

$$(3.9) \quad \begin{cases} \textit{Per } \vartheta \in \left]0\,,\min\left(1\,,\frac{n}{4}\right)\right],\ \textit{per } u \in V,\ \textit{per } v \in V_{1+(n/2)-2\vartheta} \textit{ si ha:} \\ |b(u\,,v\,,u)| \leq C_\vartheta \|u\|^{2\vartheta} \cdot |u|^{2-2\vartheta} \cdot \|v\|_{V_{1+(n/2)-2\vartheta}}\,. \end{cases}$$

Dalla (3.9) con $\vartheta = \min(1\,,n/4)$ si ha, con ragionamenti di carattere usuale, che la formula:

$$(3.10) \qquad \langle Bu\,,v\rangle_{\max\left(1,\frac{n}{2}-1\right)} = -\,b(u\,,v\,,u) \qquad \forall v \in V_{\max\left(1,\frac{n}{2}-1\right)}$$

definisce un elemento Bu tale che:

$$(3.11) \quad \begin{cases} \forall u \in V \qquad Bu \in V_{-\max\left(1,\frac{n}{2}-1\right)}\,; \\ \forall \vartheta \in \left]0\,,\min\left(1\,,\frac{n}{4}\right)\right] \qquad \|Bu\|_{V_{-1-(n/2)+2\vartheta}} \leq C_\vartheta \|u\|^{2\vartheta}\, |u|^{2-2\vartheta}\,. \end{cases}$$

Analogamente, sfruttando anziché la (3.9) la ovvia relazione: $|((u\,,v))| \leq$ $\leq \|u\| \cdot \|v\|$ si ha che la formula:

$$(3.12) \qquad \langle Au\,,v\rangle = ((u\,,v)) \qquad \forall v \in V$$

definisce un elemento Au tale che:

$$(3.13) \qquad \forall u \in V \qquad Au \in V' \quad ; \quad \|Au\|_{V'} \leq \|u\|\,.$$

3.3. Dimostrerò ora due lemmi che sfrutterò in seguito.

LEMMA 3.1. – *Sia* $u \in L^2(T_0, T_1; V) \cap L^q(T_0, T_1; H)$ *con* $2 \leq q < +\infty$; *si ha*

$$\nu Au + Bu \in L^r\left(T_0, T_1; V_{-\max\left(1, \frac{n}{2}-1\right)}\right) \quad \textit{con } r = \frac{2}{2 + (q-2)\min\left(1, \frac{n}{4}\right)} .$$

Dim. – Basta applicare la disuguaglianza di Hölder, la (3.11) con $\vartheta = \min(1, n/4)$ e la (3.13). *c. v. d.*

LEMMA 3.2. – *Sia* $u \in L^2(T_0, T_1; V) \cap L^\infty(T_0, T_1; H)$; *si ha*

$$\nu Au + Bu \in L^2(V_{-(n/2)}) .$$

Dim. – Basta applicare la (3.13) e la (3.11) con $\vartheta = \frac{1}{2}$ *c. v. d.*

3.4. Svolgerò in questo numero delle considerazioni intuitive; tali considerazioni potrebbero essere rese rigorose se si potesse sostituire allo spazio V_α lo spazio aderenza di $\mathfrak{D}_d$ in H^α (cfr. Osservazione 2.1).

Sia $u \in V$; è intuitivo che, se si suppone u « sufficientemente regolare » gli elementi Au e Bu definiti dalle (3.12) e (3.10) saranno elementi di H; supposto che ciò sia valido voglio caratterizzare Au e Bu mediante operazioni di derivazione su u; poiché Au e Bu si sanno calcolare solo su elementi di V, cioè a divergenza nulla, essi sono definiti (nel senso delle distribuzioni su Ω) « modulo un gradiente ». Dimostrerò che si ha:

$$(3.14) \qquad Au = -\Delta u \quad ; \quad Bu = (u \cdot \operatorname{grad})\, u$$

intendendo, con questa scrittura, di avere già effettuato un passaggio al quoziente « modulo i gradienti »; in altre parole la (3.14) significa che, se $u \in V$ e se $-\Delta u$ e $(u \cdot \operatorname{grad})\, u$ appartengono a $\{L^2(\Omega)\}^n$ si ha:

$$(3.15) \qquad \forall v \in V \qquad \langle Au, v \rangle = -(\Delta u, v)_{L^2} .$$

$$(3.16) \qquad \forall v \in V_{\max\left(1, \frac{n}{2}-1\right)} \qquad \langle Bu, v \rangle_{\max\left(1, \frac{n}{2}-1\right)} = ((u \cdot \operatorname{grad})\, u, v)_{L^2} .$$

La (3.15) segue dai passaggi:

$$\langle Au, v \rangle = ((u, v)) = \sum_{i,j=1}^{n} (D_i u_j, D_i v_j)_{L^2(\Omega)} = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle D_i^2 u_j, v_j \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \langle \Delta u_j, v_j \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle -\Delta u, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = (-\Delta u, v)_{L^2} .$$

Analogamente per avere la (3.16) si procede così:

$$\langle Bu, v \rangle_{\max\left(1, \frac{n}{2}-1\right)} = b(u, u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i D_i u_j v_j \, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i D_i u_j, v_j \right)_{L^2(\Omega)} = ((u \cdot \operatorname{grad})\, u, v)_{L^2} .$$