Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carla Vaghi

Sul comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni non lineari di tipo parabolico. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.1-2, p. 25–31.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_1-2_25_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Analisi matematica. — *Sul comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni non lineari di tipo parabolico* (*). Nota I di CARLA VAGHI, presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — Consider the non linear parabolic equation

$$(1)\qquad \frac{\partial z(x,t)}{\partial t}=\sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij}(x,t)\,\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x_i\,\partial x_j}-f(x,t,z,p)$$

$$\left(x=x_1,\cdots,x_m\in\Omega\ ;\ p=p_1,\cdots,p_m\ ;\ p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}\right),$$

with the boundary condition $z(x,t)|_{\partial\Omega}=0$.

Under appropriate assumptions on the function $f(x,t,z,p)$, it is proved that all the solutions of (1) have the same asymptotic behaviour when $t\to+\infty$. Subsequently, some uniqueness theorems of solutions bounded on $(-\infty,+\infty)$ are given.

§ 1. Il problema della stabilità per $t\to+\infty$, rispetto ai valori iniziali, per le soluzioni dell'equazione parabolica non lineare

$$(1.1)\qquad z_t=\sum_{1}^{3}{}_k\frac{\partial^2 z}{\partial x_k^2}-f(x,t,z),\qquad x=(x_1,x_2,x_3),$$

è stato studiato, anni or sono, da R. Bellman (1), sotto ipotesi alquanto restrittive per la funzione $f(x,t,z)$ e supponendo x variabile in un cubo di S_3. Successivamente, G. Prodi (2) ha dato altri criteri di stabilità (dimostrati utilizzando un noto lemma di H. Westphal) in condizioni molto più generali di quelle di Bellman, sia per il dominio spaziale considerato, che per la funzione f; tuttavia tale funzione è sempre supposta indipendente dalle derivate $\partial z/\partial x_i$.

In questa Nota si riprende lo stesso problema per la seguente equazione (comprendente in particolare la (1.1))

$$(1.2)\qquad z_t=\mathrm{A}z-f(x,t,z,p)$$

ove

$$\mathrm{A}z=\sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_j},$$

$$x=x_1,\cdots,x_m\quad;\quad p=p_1,\cdots,p_m\quad;\quad p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1965-66.

(**) Nella seduta del 22 giugno 1966.

(1) R. BELLMAN, *On the existence and boundedness of solutions of non linear partial differential equations of parabolic type*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *64*, 21-44 (1948).

(2) G. PRODI, *Questioni di stabilità per equazioni non lineari alle derivate parziali di tipo parabolico*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *10* (1951).

Si suppone $x \in \bar{\Omega}$ (Ω insieme aperto, limitato e connesso di S_m; $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$), $t \in J_0 = [0, +\infty)$; $p_i, z \in J = (-\infty, +\infty)$.

I coefficienti dell'operatore A, reali, continui per $x \in \bar{\Omega}$, $t \in J_0$, soddisfano le seguenti condizioni ($\forall$ m–pla $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, reale)

$$\left\{\begin{array}{l} a_{jk}(x, t) = a_{kj}(x, t), \\ \sum\limits_{j,k}^{1\cdots m} a_{jk}(x, t)\lambda_j\lambda_k \geq 0 \end{array}\right. \qquad \forall x \in \bar{\Omega}, t \in J_0. \tag{1.3}$$

La funzione $f(x, t, z, p)$ reale è continua per $x \in \Omega$, $t \in J_0$, z, $p_i \in J$.

Prescindendo dal problema dell'esistenza, si studia (§ 2 e § 3) il comportamento asintotico per $t \to +\infty$ delle soluzioni di tale equazione. Successivamente (§ 4) si suppongono i coefficienti $a_{jk}(x, t)$ e la funzione $f(x, t, z, p)$ definiti e continui anche per $t < 0$ e si dimostrano alcuni teoremi di unicità di soluzioni limitate in J.

§ 2. Sia data l'equazione (1.2) nella funzione incognita $z(x, t)$.

Diciamo Q il cilindro retto avente sezione normale Ω e generatrici parallele all'asse $t: Q = \Omega \times J$; sia poi $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times J$; $\bar{Q}_0 = \bar{\Omega} \times J_0$; $Q_0 = \Omega \times (t > 0)$.

Consideriamo le soluzioni classiche della (1.2) (cioè funzioni $z(x, t)$ continue in $\bar{Q}_0$, dotate di derivate $\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial z(x,t)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x_i \partial x_k}$ continue in Q_0) soddisfacenti la condizione ai limiti

$$z(x, t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \text{per} \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

Valgono allora i seguenti teoremi:

I. – *Se esiste una funzione* $\omega(z)$, *continua per* $z \in J$, *tale che sia*

$$z\,\omega(z) > 0 \qquad \textit{per} \quad z \neq 0, \tag{2.2}$$

e se inoltre risulta

$$z f(x, t, z, 0) \geq z\,\omega(z), \tag{2.3}$$

allora la (1.2) *ammette la soluzione nulla. Ogni altra soluzione è asintotica a questa per* $t \to +\infty$, *nel senso che risulta*

$$\lim_{t \to +\infty} z(x, t) = 0$$

uniformemente per $x \in \bar{\Omega}$.

Se in particolare $\omega(z) = kz$, $k > 0$, *si ha:*

$$|z(x, t)| \leq K e^{-kt} \qquad (K = \max_{x \in \bar{\Omega}} |z(x, 0)|). \tag{2.4}$$

II. – *Se esiste una funzione* $\omega(z)$, *continua per* $z \in J$, *soddisfacente la* (2.2), *e se inoltre risulta*

$$w\{f(x, t, z + w, p) - f(x, t, z, p)\} \geq w\,\omega(w), \tag{2.5}$$

allora tutte le soluzioni della (1.2) *hanno, per* $t \to +\infty$, *lo stesso comportamento asintotico nel senso che, dette* $z_1(x, t)$ *e* $z_2(x, t)$ *due qualsiasi soluzioni, risulta*

$$\lim_{t \to +\infty} (z_1(x, t) - z_2(x, t)) = 0, \tag{2.6}$$

uniformemente per $x \in \bar{\Omega}$.

Se in particolare, $\omega(z) = kz$, $k > 0$, *si ha:*

$$|z_1(x, t) - z_2(x, t)| \leq K e^{-kt} \tag{2.7}$$
$$(K = \max_{x \in \bar{\Omega}} |z_1(x, 0) - z_2(x, 0)|).$$

Dimostriamo il teorema I.

Dalle ipotesi (2.2) e (2.3) si ha che

$$f(x, t, z, 0) > 0 \qquad \text{per } z > 0,$$
$$f(x, t, z, 0) < 0 \qquad \text{per } z < 0;$$

ne segue, per la continuità di f, che

$$f(x, t, 0, 0) = 0,$$

e quindi *la* (1.2) *ammette la soluzione nulla.*

Consideriamo ora un'altra soluzione $z(x, t) \neq 0$ e poniamo

$$\eta(t) = \max_{x \in \bar{\Omega}} z(x, t). \tag{2.8}$$

Come è ben noto $\eta(t)$ risulta funzione continua (per $t \geq 0$).

Supponiamo ora che esista un punto $(\bar{x}, \bar{t})$ $(\bar{x} \in \Omega, \bar{t} > 0)$ nel quale sia $z(\bar{x}, \bar{t}) > 0$. Allora risulta

$$\eta(\bar{t}) > 0, \tag{2.9}$$

e vi sarà un intervallo nel quale $\eta(t)$ si mantiene positiva; indichiamo con $\bar{\mathfrak{I}}$ $(t_0 < t \leq \bar{t})$ l'intorno sinistro più ampio possibile nel quale è $\eta(t) > 0$.

Dimostriamo che $\eta(t)$ *soddisfa ad una condizione di Lipschitz, uniformemente in ogni intervallo limitato* $[t_1, \bar{t}] \subset \bar{\mathfrak{I}}$; *risulta inoltre, quasi ovunque in* $\bar{\mathfrak{I}}$,

$$\eta'(t) = z_t(x(t), t) \tag{2.10}$$

ove $x(t)$ *è scelto,* $\forall t$, *in modo che sia*

$$z(x(t), t) = \eta(t).$$

Sia $[t_1, \bar{t}]$ un intervallo limitato con $t_0 < t_1 < \bar{t}$; $\forall t' \in [t_1, \bar{t}]$ si consideri in $S(x \in \Omega, t = t')$ l'insieme chiuso $E(t')$ definito dalla condizione

$$z(x, t') = \eta(t').$$

Al variare di t' in $[t_1, \bar{t}]$ l'insieme $E(t')$ descrive nel cilindro $\bar{Q}_1 (x \in \bar{\Omega}, t_1 \leq t \leq \bar{t})$ un insieme chiuso B. Poiché è

$$z(x, t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad , \quad \eta(t) > 0,$$

esisterà un $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ tale che B sia contenuto in $\bar{Q}_1' (x \in \bar{\Omega}', t_1 \leq t' \leq \bar{t})$.

Ma in $\bar{Q}_1'$ $z_t(x, t)$, essendo continua, è limitata. Esisterà quindi una conveniente costante positiva M_1 tale che

$$|z_t(x, t)| \leq M_1 \qquad \text{per} \quad x, t \in \bar{Q}_1'. \tag{2.11}$$

Consideriamo ora, per t e $t + h \in [t_1, \bar{t}]$, la differenza $\eta(t + h) - \eta(t)$. Risulta

$$\begin{aligned} \eta(t+h) - \eta(t) &= z(x(t+h), t+h) - z(x(t), t) \geq \\ &\geq z(x(t), t+h) - z(x(t), t) = h\, z_t(x(t), \tau_1) \qquad (\tau_1 \in (t, t+h) \subset [t_1, \bar{t}]). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Per la (2.11) si ha allora

$$\eta(t+h) - \eta(t) \geq -|h| M_1.$$

D'altra parte si può scrivere

$$\begin{aligned} \eta(t+h) - \eta(t) &= z(x(t+h), t+h) - z(x(t), t) \leq \\ &\leq z(x(t+h), t+h) - z(x(t+h), t) = h\, z_t(x(t+h), \tau_2) \\ &\qquad (\tau_2 \in (t, t+h) \subset [t_1, \bar{t}]). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Per la (2.11) si ha allora

$$\eta(t+h) - \eta(t) \leq M_1 |h|.$$

Ne segue che $\eta(t)$ soddisfa in $[t_1, \bar{t}] \subset \bar{\mathfrak{J}}$ alla condizione di Lipschitz:

$$|\eta(t+h) - \eta(t)| \leq M_1 |h|.$$

Quindi $\eta(t)$ è derivabile in tutto $[t_1, \bar{t}]$ (e perciò in tutto $\bar{\mathfrak{J}}$), escluso al più un insieme di misura nulla.

Se $\eta(t)$ è derivabile nel punto t, segue, dalla (2.12),

$$\frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} \geq z_t(x(t), \tau_1) \qquad \text{per} \quad h > 0,$$

e quindi, per $h \to 0^+$,

$$\eta'(t) \geq z_t(x(t), t).$$

Analogamente si ha:

$$\frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} \leq z_t(x(t), \tau_1) \qquad \text{per} \quad h < 0,$$

cioè, per $h \to 0^-$,

$$\eta'(t) \leq z_t(x(t), t).$$

La (2.10) è perciò dimostrata.

Osserviamo ora che nel punto di massimo $(x(t), t)$ è

$$p_1 = \cdots = p_m = 0 \quad , \quad \sum_{j,k}^{1\cdots m} \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_k} \xi_j \xi_k \leq 0.$$

Ne segue, per un noto lemma di Moutard (3), ricordando la (1.3), che è anche

$$Az = \sum_{j,k}^{1\cdots m} a_{jk}(x, t) \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_k} \leq 0.$$

Quindi per la (2.10) e per la (1.2) risulta

$$\eta'(t) = z_t(x(t), t) = Az(x(t), t) - f(x(t), t, \eta(t), 0) \leq -f(x(t), t, \eta(t), 0).$$

Per la (2.3) si ha allora, essendo $\eta(t) > 0$,

$$\eta'(t) \leq -\omega(\eta(t)). \tag{2.14}$$

Perciò, essendo $\omega(z) > 0$ per $z > 0$, $\eta(t)$ risulta funzione decrescente in tutto l'intervallo $\bar{\mathfrak{J}}(t_0, \bar{t}]$. Ne segue che è $t_0 = 0$.

Se infatti fosse $t_0 > 0$, si avrebbe, per la continuità e decrescenza di $\eta(t)$,

$$\lim_{t \to t_0^+} \eta(t) = \eta(t_0) > 0$$

e l'intervallo $\bar{\mathfrak{J}}$ sarebbe ulteriormente ampliabile, contro l'ipotesi ammessa.

Quindi $\eta(t)$ è funzione decrescente e positiva in tutto l'intervallo $[0, \bar{t}]$ e risulta, per la (2.14), per $0 \leq t \leq \bar{t}$,

$$\frac{\eta'(t)}{\omega(\eta(t))} \leq -1. \tag{2.15}$$

Sia poi $[\bar{t}, t^*)$ il massimo intorno destro di $\bar{t}$, nel quale $\eta(t) > 0$ (e quindi $\omega(\eta(t)) > 0$). Anche in tale intervallo risulterà ovviamente $\eta(t)$ decrescente e varrà ancora la (2.15).

Se t^* è finito risulta $\eta(t^*) = 0$ e quindi $\eta(t) = 0$ per $t > t^*$ (non può infatti essere $\eta(t) > 0$ per $t > t^*$, perchè seguirebbe, data la decrescenza e continuità di $\eta(t)$, $\eta(t^*) > 0$; né può essere $\eta(t) < 0$ perché $z(x, t)|_{\partial\Omega} = 0$).

Se $t^* = +\infty$, essendo $\eta(t)$ funzione decrescente, si ha

$$\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = 0.$$

Infatti se fosse

$$\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = \rho > 0,$$

(3) TH. MOUTARD, *Notes sur les équations aux derivées partielles*, « Journal de l'Ecole Polit. », *64* (1894).

risulterebbe, $\forall t > \bar{t}$,

$$\int_{\eta(t)}^{\eta(\bar{t})} \frac{d\eta}{\omega(\eta)} \leq \int_{\varrho}^{\eta(\bar{t})} \frac{d\eta}{\omega(\eta)} < +\infty, \tag{2.16}$$

mentre, integrando la (2.15) fra $\bar{t}$ e $t > \bar{t}$ si trova:

$$\int_{\bar{t}}^{t} \frac{\eta'(t)}{\omega(\eta(t))} dt = \int_{\eta(\bar{t})}^{\eta(t)} \frac{d\eta}{\omega(\eta)} \leq -(t-\bar{t}) \tag{2.17}$$

da cui

$$\int_{\eta(t)}^{\eta(\bar{t})} \frac{d\eta}{\omega(\eta)} \geq t-\bar{t} \to +\infty,$$

contro la (2.16).

In modo analogo si ragiona per la funzione

$$\mu(t) = \min_{x \in \bar{\Omega}} z(x, t).$$

Infatti posto $z(x, t) = -u(x, t)$, $u(x, t)$ è soluzione dell'equazione

$$u_t = \mathrm{A}u - \psi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

ove la funzione

$$\psi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -f\left(x, t, -u, -\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

soddisfa all'ipotesi (2.3), risultando

$$u\,\psi(x, t, u, 0) = -uf(x, t, -u, 0) \geq -u\omega(-u) = u\,\omega_1(u) > 0 \quad (u \neq 0).$$

Resta così provato che risulta

$$\lim_{t \to +\infty} z(x, t) = 0$$

uniformemente per $x \in \bar{\Omega}$.

In particolare se $\omega(z) = kz$, $k > 0$, dalla (2.17) segue

$$\frac{1}{k} \log \frac{\eta(t)}{\eta(\bar{t})} \leq -(t-\bar{t})$$

da cui

$$\eta(t) \leq e^{k\bar{t}}\,\eta(\bar{t})\,e^{-kt} = \mathrm{K}_1\,e^{-kt}, \qquad t > \bar{t}, \mathrm{K}_1 > 0.$$

Analogamente si trova

$$\mu(t) \geq e^{k\bar{t}}\,\mu(\bar{t})\,e^{-kt} = -\mathrm{K}_2\,e^{-kt}, \qquad t > \bar{t}, \mathrm{K}_2 > 0.$$

Ne segue

$$|z(x,t)| \leq \overline{K}e^{-kt}, \qquad t > \bar{t},$$

e quindi, per $\bar{t} = 0$, la (2.4).

Il teorema I è perciò provato.

Osserviamo infine che la dimostrazione sopra riportata continua a valere anche se i coefficienti dell'operatore A sono funzioni, oltre che di x e di t, anche di z, p_i, p_{il}:

$$a_{jk} = a_{jk}(x, t, z, p_i, p_{il}) \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i};\ p_{il} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_l};\ i, l = 1, \cdots, m\right)$$

purché risulti (per $p_i = 0$)

$$\sum_{j,k}^{1\cdots m} a_{jk}\lambda_j\lambda_k \geq 0. \tag{2.18}$$

Dimostriamo ora il teorema II.

Siano $z_1(x,t)$ e $z_2(x,t)$ due soluzioni della (1.2). Posto

$$\zeta(x,t) = z_1(x,t) - z_2(x,t),$$

ζ risulta soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}\zeta_t = A\zeta - \left\{ f\left(x, t, z_2 + \zeta, \frac{\partial z_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right) - f\left(x, t, z_2, \frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)\right\} = \\ = A\zeta - g\left(x, t, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Ma la funzione $g\left(x, t, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right)$ soddisfa l'ipotesi (2.3) del teorema I, perché per la (2.19) e la (2.5), si ha, $\forall \zeta \in J$,

$$\zeta g(x, t, \zeta, 0) = \zeta \left\{ f\left(x, t, z_2 + \zeta, \frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right) - f\left(x, t, z_2, \frac{\partial z_2}{\partial x_i}\right)\right\} \geq \zeta\omega(\zeta).$$

Ne segue che $\zeta(x,t)$ è asintotica, per $t \to +\infty$, alla soluzione nulla, con l'andamento di monotonia già descritto, e risulta

$$\lim_{t\to+\infty} (z_1(x,t) - z_2(x,t)) = 0$$

uniformemente per $x \in \overline{\Omega}$.

Se poi $\omega(z) = kz$, $k > 0$, si ha, come in I,

$$|\zeta(x,t)| = |z_1(x,t) - z_2(x,t)| \leq K e^{-kt}$$

ove

$$K = \max_{x \in \overline{\Omega}} |z_1(x,0) - z_2(x,0)|.$$