Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Scorza Dragoni

A proposito degli autoomeomorfismi periodici del disco circolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.6, p. 979–985.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_6_979_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 22 giugno 1966

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Matematica. — *A proposito degli autoomeomorfismi periodici del disco circolare.* Nota [*] del Corrisp. GIUSEPPE SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — It is shown that a non-identical direct periodic automorphism of the circle always admits one and only one fixed point, which is an internal point. This property is a consequence of well known results, but is obtained here in a simple direct way.

Un autoomeomorfismo di un cerchio, di un cerchio in quanto disco circolare, è topologicamente equivalente ad una rotazione attorno al centro del cerchio, se conserva l'indicatrice, è topologicamente equivalente ad una simmetria rispetto ad un diametro del cerchio nel caso contrario [1].

Da questo teorema di Brouwer–Kerékjártó–Eilenberg segue che se un autoomeomorfismo periodico e non identico di un cerchio conserva l'indicatrice, esso ammette un punto unito solo, il punto unito risultando interno al cerchio.

(*) Presentata nella seduta del 22 giugno 1966.

(1) B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Ueber die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*, « Mathematische Annalen », *80* (1919), 36–38; L. E. J. BROUWER, *Ueber die periodischen Transformationen der Kugel*, ibidem, pp. 39–41; S. EILENBERG, *Sur les transformations periodiques de la surface de sphère*, « Fundamenta mathematicae », *22* (1934), 28–41; B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Ergänzung zu meinem Aufsatz: Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen*, « Acta litterarum ac scientiarum » dell'Università di Szeged, VII (1934–35), 58–59. Per ulteriori notizie sugli autoomeomorfismi periodici dei solidi sferici tri– e quadrimensionali si vegga: G. DE RAHM, *Involutions topologiques de* S^4, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Seminari 1962–63 di analisi, algebra, geometria e topologia (Cremonese, Roma 1965), pp. 725–736.

Se un autoomeomorfismo di un cerchio ammette un punto unito solo, il punto unito risultando interno al cerchio, l'autoomeomorfismo non è identico e conserva l'indicatrice. E se gli si impone per di più di essere periodico, la sua equivalenza ad una rotazione attorno al centro del cerchio è stata dimostrata dalla Villella Bressan (2) partendo appunto da alcuni miei risultati sulla struttura di quegli autoomeomorfismi del cerchio che ammettono un punto unito solo, il punto unito risultando per di più interno al cerchio (3).

Perché la dimostrazione della Villella Bressan diventi una dimostrazione del teorema di Brouwer–Kerékjártó–Eilenberg, necessariamente limitata al caso degli autoomeomorfismi periodici che conservano l'indicatrice, basta dimostrare direttamente che se un autoomeomorfismo periodico e non identico del cerchio conserva l'indicatrice, esso ammette un punto unito solo, il punto unito risultando per di più interno al cerchio.

E questo risultato è raggiunto in questa Nota (4), riportando esplicitamente anche considerazioni a deduzioni consuete, in guisa da ottenere una maggiore chiarezza di esposizione.

1. In questo primo numero ricorderemo qualche risultato sugli autoomeomorfismi periodici di un segmento, di una circonferenza e di un cerchio, superfluo essendo rammentare che un autoomeomorfismo è periodico se ammette infinite potenze identiche.

Precisamente, incominciamo col ricordare che:

Un autoomeomorfismo periodico t di un segmento l si riduce all'identità, se conserva i versi di percorrenza e lascia fermo almeno un punto del segmento, queste condizioni essendo entrambe soddisfatte se l'autoomeomorfismo lascia fermo uno degli estremi del segmento (5).

Il punto A del segmento l sia unito nell'autoomeomorfismo t. E sia P un punto di l diverso da A. Se $t(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$, non vi è nulla da dimostrare. Se $t(\mathrm{P}) \neq \mathrm{P}$, sia α il segmento cogli estremi in A ed in P. Poiché t conserva i versi di percorrenza (e poiché $t(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ e $t(\mathrm{P}) \neq \mathrm{P}$), α contiene propriamente $t(\alpha)$ od è contenuto propriamente in $t(\alpha)$. Nel primo caso risulta $\alpha \supset t(\alpha) \supset t^2(\alpha) \supset \cdots$; e nel secondo $\alpha \subset t(\alpha) \subset t^2(\alpha) \subset \cdots$; e tutto questo non è compatibile con la periodicità di t.

Il ragionamento precedente assicura altresì che:

Un autoomeomorfismo periodico t di una circonferenza k si riduce all'identità, se conserva i versi di percorrenza e se lascia fermo almeno un punto della circonferenza (6).

(2) R. VILLELLA BRESSAN, *A proposito degli autoomeomorfismi periodici del cerchio* (in corso di stampa in questi « Rendiconti »).

(3) G. SCORZA DRAGONI, *Sugli autoomeomorfismi del cerchio dotati di un punto unito unico e interno al cerchio* (in corso di stampa nelle « Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg »).

(4) Redatta nell'ambito dell'attività dei gruppi matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(5) Si vegga, per esempio, nel lavoro di Eilenberg, il primo enunciato di p. 30.

(6) Si vegga, per esempio, nel lavoro di Eilenberg, l'ultimo enunciato di p. 30.

Nel fatto, il punto A di k sia unito nell'autoomeomorfismo t. E sia P un punto di k diverso da A. Se $t(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$, non vi è nulla da dire. Se $t(\mathrm{P}) \neq \mathrm{P}$, sia α uno dei due sottoarchi di k con gli estremi in A e P. Poiché t conserva i versi di percorrenza (e poiché $t(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ e $t(\mathrm{P}) \neq \mathrm{P}$), α contiene propriamente $t(\alpha)$ o è contenuto propriamente in $t(\alpha)$; ecc., ecc.

E ripresentiamo anche la dimostrazione fornita da Eilenberg per la circostanza che:

Un autoomeomorfismo periodico t di un disco circolare K *è identico, se lascia fermi tutti i punti della frontiera k di* K [(7)].

Sia P un punto interno di K. Sia β una curva semplice ed aperta, che passi per P e che abbia gli estremi, A e B, e soltanto gli estremi, sulla frontiera k di K; di guisa che tutti i punti di β diversi da A e B sono interni a K. Sia α uno dei due sottarchi individuati da A e B su k e si ponga $\gamma = \alpha \cup \beta$; di guisa che γ è una curva semplice e chiusa, che delimiterà una certa regione chiusa e limitata Γ. E sia m il periodo di t, cioè il minimo numero naturale che pensato come esponente per t dia luogo all'autoomeomorfismo identico. Gli insiemi $\Gamma, t(\Gamma), \cdots, t^{m-1}(\Gamma)$ hanno in comune l'arco α e sono contenuti nel cerchio K, quindi l'intersezione dei loro interni non è vuota. Ne segue che la componente aperta ed illimitata del complementare di $\gamma \cup t(\gamma) \cup \cdots$ $\cdots \cup t^{m-1}(\gamma)$ ammette come frontiera una curva semplice e chiusa δ contenuta nell'insieme $\gamma \cup t(\gamma) \cup \cdots \cup t^{m-1}(\gamma)$, che è chiuso e limitato [(8)]. La curva δ è costituita ovviamente da α e da un arco semplice ed aperto β', che ha gli stessi estremi di α (e di β), e che, se si prescinde dagli estremi, è contenuto nell'interno di K (al pari di β). Da tutto ciò segue intanto che β' è contenuto in $\beta \cup t(\beta) \cup \cdots \cup t^{m-1}(\beta)$. La curva δ è invariante nella t, in quanto insieme, perché tale è ovviamente l'insieme $\gamma \cup t(\gamma) \cup \cdots \cup t^{m-1}(\gamma)$. Di qui e dall'invarianza di α, punto per punto, epperò in quanto insieme, segue l'invarianza, in quanto insieme, di β', mentre gli estremi A e B di β' sono invarianti rispetto a t in quanto punti. Di qui e dal primo lemma di questo numero segue che ogni punto di β' è unito rispetto a t; epperò che β' appartiene a β, attesa la $\beta' \subseteq \beta \cup t(\beta) \cup \cdots \cup t^{m-1}(\beta)$ ed atteso il significato di m. Ne segue che le curve semplici ed aperte β e β' coincidono, in quanto hanno anche gli stessi estremi; epperò che tutti i punti di β sono uniti rispetto a t. Donde la conclusione, attesa la $\mathrm{P} \in \beta$ ed attesa l'arbitrarietà di P nell'interno di K.

2. Un autoomeomorfismo periodico di una corona circolare, il quale applichi su se stesso le due circonferenze estreme della corona, si prolunga immediatamente in un autoomeomorfismo periodico di tutto il cerchio delimitato dalla maggior circonferenza estrema. Epperò:

(7) EILENBERG, loc. cit., pp. 33–34.

(8) Per quello che ha tratto alla struttura topologica di δ si può vedere: G. SCORZA DRAGONI, *Qualche teorema sulle curve di Jordan*, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. 6, *23* (1936), 181–186, n° 3.

Un autoomeomorfismo periodico di una corona circolare è necessariamente identico, se lascia fermi tutti i punti della maggior circonferenza estrema della corona:

e dopo di ciò è ovvio che:

La conclusione sussiste anche per quegli autoomeomorfismi periodici della corona circolare che lasciano fermi tutti i punti della minor circonferenza estrema della corona;

nel fatto, per ridurre questo caso al precedente basta ricorrere ad un'opportuna inversione per raggi vettori reciproci.

3. Dai lemmi del primo dei numeri precedenti si deduce immediatamente che:

Un autoomeomorfismo periodico t di un cerchio K *è identico, se conserva il senso delle rotazioni e se ammette punti uniti sulla frontiera k di* K;

nel fatto, allora k è invariante in quanto insieme e contiene punti invarianti, mentre t conserva su k i versi di percorrenza; indi k è invariante punto per punto (n° 1, secondo lemma); e da qui e dall'ultimo lemma del n° 1 la conclusione.

Dai lemmi del n° 1 e da quelli del n° 2 si deduce subito che:

Un autoomeomorfismo periodico t di un cerchio K *si riduce all'identità, se conserva il senso delle rotazioni e se ammette, come invarianti in quanto insiemi, curve semplici e chiuse contenute nell'interno di* K *e provviste di punti invarianti.*

Nelle ipotesi attuali, infatti, queste curve sono unite rispetto a t punto per punto, atteso il secondo lemma del n° 1; epperò uniti rispetto a t sono anche tutti i punti di K, attesi l'ultimo lemma del n° 1 e quelli del n° 2, ed attesa l'equivalenza topologica dei dischi circolari con le regioni chiuse e limitate delimitate da singole curve semplici e chiuse e delle corone circolari con le regioni chiuse e limitate delimitate da due curve semplici e chiuse disgiunte [9].

Non staremo ad insistere poi sulla circostanza che i due lemmi precedenti si potrebbero riunire in uno solo, contemplante curve semplici e chiuse contenute nel cerchio K.

4. Ormai possiamo rivolgerci al risultato che ci interessa; cioè a dimostrare che:

Un autoomeomorfismo t, periodico e non identico, del cerchio K, *se conserva il senso delle rotazioni, ammette soltanto un punto unito, ed il punto unito è necessariamente interno a* K.

Nel fatto, il primo lemma del numero precedente assicura intanto che allora tutti gli eventuali punti di K uniti rispetto a t sono interni a K.

La presenza, in K, di punti invarianti rispetto a t segue poi subito dal solito teorema di Brouwer sul punto unito.

(9) B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie* (Springer, Berlino 1923), pp. 72–73.

E per concludere, resta da far vedere che la presenza nell'interno di K di due punti invarianti rispetto a t avrebbe come conseguenza che tutti i punti di K sarebbero uniti rispetto a t.

Siano dunque C e D due punti siffatti. E si supponga anzi, come è lecito, che C sia proprio il centro di K, di guisa che la distanza fra C e D sarà minore del raggio R di K.

Detto ρ un numero reale positivo minore di R, $0 < \rho < R$, indichiamo con k_ρ la circonferenza e con K_ρ il cerchio col centro in C e col raggio uguale a ρ.

Nelle condizioni attuali k_ρ e K_ρ sono contenuti nell'interno di K. Pertanto possiamo considerare tanto l'insieme $k_\rho \cup t(k_\rho) \cup \cdots \cup t^{m-1}(k_\rho)$, quanto l'insieme $K_\rho \cup t(K_\rho) \cup \cdots \cup t^{m-1}(K_\rho)$; poniamo anzi

$$h_\rho = k_\rho \cup t(k_\rho) \cup \cdots \cup t^{m-1}(k_\rho) \quad , \quad H_\rho = K_\rho \cup t(K_\rho) \cup \cdots \cup t^{m-1}(K_\rho),$$

di guisa che gli insiemi h_ρ ed H_ρ sono entrambi chiusi e limitati, sono entrambi contenuti nell'interno di K e sono entrambi invarianti rispetto a t. In quanto funzione di ρ, l'insieme H_ρ è una funzione crescente di ρ; anzi, da $\rho' < \rho''$ segue subito che $H_{\rho'}$ è contenuto nell'interno di $H_{\rho''}$, il significato di ρ' e ρ'' essendo ovvio.

Tutte le regioni $K_\rho, t(K_\rho), \cdots, t^{m-1}(K_\rho)$ contengono C nell'interno. Pertanto la componente aperta ed illimitata Δ_ρ^* del complementare di h_ρ ha come frontiera una curva semplice e chiusa, δ_ρ [10], che delimiterà una regione chiusa e limitata Δ_ρ. La curva δ_ρ e la regione Δ_ρ sono entrambe contenute nell'interno di K e sono entrambe invarianti rispetto a t. La curva δ_ρ è contenuta in h_ρ, epperò in H_ρ. La regione Δ_ρ contiene h_ρ ed H_ρ e contiene nel proprio interno tutti i punti interni ad H_ρ. L'insieme Δ_ρ cresce poi al crescere di ρ: nel fatto, se per i numeri reali ρ' e ρ'', positivi e minori di R, risulta $\rho' < \rho''$, la curva $\delta_{\rho'}$ appartiene all'interno di $H_{\rho''}$, epperò a quello di $\Delta_{\rho''}$; donde appunto la conclusione (nonchè la $\delta_{\rho'} \cap \delta_{\rho''} = \emptyset$). L'insieme Δ_ρ^* decresce al crescere di ρ.

Il punto C è interno a Δ_ρ per ogni ρ positivo e minore di R. Il punto D è esterno a Δ_ρ se ρ è abbastanza piccolo, ed è interno a Δ_ρ se ρ è abbastanza vicino ad R. L'insieme dei valori di ρ siffatti, che D sia esterno a Δ_ρ, è un intervallo, aperto o semiaperto, con un estremo nello zero e l'altro in un certo numero reale positivo r, minore di R.

La curva δ_r è contenuta nell'interno di K ed è invariante rispetto a t. E se essa passasse per qualche punto invariante rispetto a t, in particolare per D, non ci sarebbe che da ricorrere all'ultimo lemma del n° 3. Sicché, per concludere, basta far vedere che D non può appartenere all'insieme aperto Δ_r^*; e che la presenza di D nell'interno dell'insieme chiuso Δ_r non è compatibile con l'assenza, in δ_r, di punti uniti rispetto a t. La prima cosa sarà dimostrata nel prossimo numero; e la seconda nel successivo.

(10) Loc. cit. (8), n° 3.

5. Supponiamo dunque, per assurda ipotesi, che il punto D sia interno all'insieme aperto Δ_r^*.

Dette proprie quelle semilinee semplici ed aperte (cioè quelle immagini topologiche delle semirette), che contengono tutti i rispettivi punti di accumulazione, uniamo D all'infinito mediante una semilinea semplice aperta e propria $\varkappa$ priva di punti in comune con la regione Δ_r. In queste condizioni la distanza del punto corrente di $\varkappa$ dal punto corrente di Δ_r non può scendere al di sotto di un conveniente numero reale positivo 2σ.

Al numero reale e positivo ρ imponiamo di soddisfare alle $r < \rho < R$ e di essere *abbastanza* vicino ad r. In queste condizioni, l'insieme h_ϱ è contenuto nel σ–intorno dell'insieme h_r; epperò, a più forte ragione, nel σ–intorno di Δ_r. Ne viene che nelle condizioni attuali δ_ϱ è contenuta nel σ–intorno di Δ_r; e quindi che $\varkappa$ e δ_ϱ non hanno punti in comune; cioè che D, appartenendo a Δ_r^*, appartiene anche a Δ_ϱ^*, se il numero reale ρ, maggiore di r, è abbastanza vicino ad r. Ma questo non è compatibile col significato di estremo superiore posseduto da r. E la nostra prima conclusione parziale è raggiunta.

6. Per completare la nostra dimostrazione, supponiamo adesso, se possibile, che D sia interno a Δ_r e che δ_r non contenga punti uniti rispetto a t.

Previo l'eventuale ricorso ad un autoomeomorfismo del piano, possiamo supporre che δ_r sia, al pari di k, una circonferenza col centro nel punto C; e che quindi Δ_r sia anch'esso un cerchio col centro nel punto C, al pari di K [11]. Naturalmente non potremo più supporre che siano delle circonferenze (tutte) le curve k_ϱ e dei cerchi (tutte) le regioni K_ϱ; e ρ sarà ormai soltanto un parametro da cui le curve k_ϱ e le regioni K_ϱ dipenderanno, diciamo, con continuità (ρ variando sempre da zero ad R, estremi esclusi).

Ferme le convenzioni poste, indichiamo con P_r un punto fisso di δ_r e percorriamo la successione P_r, $t(P_r)$, $t^2(P_r)$, $\cdots$ fino al primo elemento, $t^n(P_r)$, uguale a P_r. La presenza di $t^n(P_r)$ è certa ed il numero naturale n soddisfa ovviamente alle $2 \leq n \leq m$. Ma si riconosce subito che m ed n coincidono: in quanto autoomeomorfismo di K, infatti, t^n conserva l'indicatrice; ammette in δ_r una curva invariante, contenuta nell'interno di K; e possiede, nel punto P_r di δ_r, un punto invariante; indi esso si riduce all'identità (n° 3, secondo lemma); e se n fosse minore di m, il periodo di t non sarebbe m, bensì n.

In conclusione, i punti P_r, $t(P_r)$, $\cdots$, $t^{m-1}(P_r)$ sono distinti a due a due; epperò è positivo il minimo delle loro mutue distanze, come è positivo il minimo della distanza del punto D dal punto corrente di δ_r.

Si fissi su δ_r un verso di percorrenza, da chiamarsi positivo. E dei punti $t(P_r)$, $t^2(P_r)$, $\cdots$, $t^{m-1}(P_r)$, sia $t^p(P_r)$ il primo che si incontra quando si percorre δ_r a partire da P_r nel verso positivo. E sia α_r l'arco di δ_r così percorso. L'arco α_r ha un estremo in P_r e l'altro in $t^p(P_r)$ e non contiene nell'interno nessuna immagine di P_r in potenze identiche e non identiche di t. L'immagine di α_r in t^p ha un estremo in $t^p(P_r)$ e l'altro in $t^{2p}(P_r)$, non contiene nell'interno

(11) Si vegga di nuovo il passo citato nella nota (9).

nessuna immagine di P_r in potenze identiche e non identiche di t ed ha in comune con α_r soltanto l'estremo $t^p(P_r)$. E così di seguito, fino a $t^{(m-1)p}(\alpha_r)$, che ha un estremo in $t^{(m-1)p}(P_r)$ e l'altro in $t^{mp}(P_r)$, cioè in P_r, che non contiene nell'interno nessuna immagine di P_r in potenze identiche e non identiche di t e che ha in comune con $t^{(m-2)p}(\alpha_r)$ soltanto l'estremo $t^{(m-1)p}(P_r)$ e con $t^{mp}(\alpha_r)$, cioè con α_r, soltanto l'estremo $t^{mp}(P_r)$, cioè soltanto l'estremo P_r (12). In conclusione, gli archi $\alpha_r, t^p(\alpha_r), \cdots, t^{(m-1)p}(\alpha_r)$ si incontrano nell'ordine scritto quando si percorre δ_r a partire da P_r nel verso positivo, sono privi a due a due di punti interni in comune ed esauriscono complessivamente δ_r.

Il punto P_r, in quanto punto di δ_r, appartiene ad h_r. E se il numero reale positivo ρ è minore di r ed è *abbastanza* vicino ad r, su h_ρ potremo trovare punti arbitrariamente vicini a P_r. Dettone P'_ρ uno, percorriamo il segmento non degenere $P_r P'_\rho$ a partire da P_r fino al primo punto P_ρ comune al segmento $P_r P'_\rho$ e a δ_ρ.

Il segmento non degenere $P_r P_\rho$, diciamolo λ_r, ha soltanto P_r su δ_r e soltanto P_ρ su δ_ρ. Tutti gli altri suoi punti sono interni a Δ^*_ρ (ed esterni a Δ_ρ). E basta ovviamente supporre che ρ sia abbastanza vicino ad r (e minore di r), per essere certi che le curve $\lambda_r, t^p(\lambda_r), \cdots, t^{(m-1)p}(\lambda_r)$ siano a due a due disgiunte, mentre $t^{mp}(\lambda_r)$ coincide con λ_r; e per essere certi che nessuna di esse passi per il punto D.

Fissiamo per ρ un tal valore s, minore di r ed abbastanza vicino ad r, che per s si presentino appunto le circostanze descritte. Previo un eventuale ulteriore autoomeomorfismo del piano, possiamo supporre che anche δ_s sia una circonferenza col centro in C (13). E su δ_s possiamo assumere come positivo il verso concorde a quello già assunto come positivo su δ_r.

Nelle condizioni attuali i punti $P_s, t^p(P_s), \cdots, t^{(m-1)p}(P_s)$ di δ_s sono distinti a due a due e si succedono su δ_s nel verso positivo. Ebbene, sia α_s l'arco di δ_s descritto da un punto che percorra δ_s a partire da P_s fino a $t^p(P_s)$ nel verso positivo; si ponga $\gamma_r = \alpha_r \cup t^p(\lambda_r) \cup \alpha_s \cup \lambda_r$; e si dica Γ_r la regione chiusa e limitata delimitata dalla curva semplice e chiusa γ_r.

Nelle condizioni attuali le regioni $\Gamma_r, t^p(\Gamma_r), \cdots, t^{(m-1)p}(\Gamma_r)$ sono prive a due a due di punti interni in comune, sono contenute nella corona circolare compresa fra δ_r e δ_s e la esauriscono, mentre nessuna delle curve $\gamma_r, t^p(\gamma_r), \cdots, t^{(m-1)p}(\gamma_r)$ passa per il punto D, interno alla stessa corona circolare e quindi interno ad una almeno delle regioni $\Gamma_r, t^p(\Gamma_r), \cdots, t^{(m-1)p}(\Gamma_r)$. Ma quest'ultima circostanza non è compatibile con quelle, che D sia invariante nella t, epperò nella t^p, e che gli interni di $\Gamma_r, t^p(\Gamma_r), \cdots, t^{(m-1)p}(\Gamma_r)$ siano disgiunti a due a due. Pertanto l'assurdo è raggiunto. E la dimostrazione è ultimata.

(12) Naturalmente, se $m = 2$ il numero p si riduce all'unità e gli archi α_r e $t(\alpha_r)$ hanno in comune gli estremi P_r e $t(P_r)$ e soltanto gli estremi. Per le considerazioni del testo, si vegga anche loc. cit. (2), n° 2.

(13) Si vegga sempre il passo citato nella nota (9). Si noti, volendo, che a questo secondo eventuale autoomeomorfismo del piano si può anche imporre di non distruggere la natura rettilinea di λ_r.