Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Tallini Scafati

$\{k, n\}$-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.6, p. 1020–1025.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_6_1020_0>

Geometria. — *$\{k, n\}$-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri.* Nota II di MARIA TALLINI SCAFATI, presentata [(*)] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — This Note II goes deeper into the study of the arcs considered at the end of the previous Note I, by determining those among them for which $m = 1$ or $n = q$, and those for which k takes its highest or lowest value. A graphic characterization of the Hermitian curves is then given.

6. In questo numero ci proponiamo di determinare i $\{k, n\}$-archi K a due caratteri, che siano estremali, di un piano grafico π_q, con $q = p^s$, p primo. Poiché – come è stato già osservato – se K è minimale, il suo complementare $\bar{K}$ è massimale, ci si può ridurre al caso in cui K sia massimale e cioè che sia $k = (n - 1) q + m$, ove m è la specie di K.

Dalle (17), per $k = (n - 1) q + m$, si ottiene: $v_n = q$, $v_m = 1$. Ne segue che $mt_m = k$ e $qk = nt_n$, onde:

$$t_m = \frac{(n-1)q}{m} + 1 \quad , \quad t_n = q^2 + \frac{q(m-q)}{n}. \tag{26}$$

Poiché è $t_m + t_n = q^2 + q + 1$, si ha:

$$n^2 + m^2 - mn - mq - n = 0. \tag{27}$$

Dalla (15) e dalla (17) si ricava che $v_n = u_n + \frac{q}{n-m}$. Dunque $n - m$ deve dividere q. Posto allora:

$$q_1 = n - m \quad , \quad q_2 = q/q_1, \qquad (q_1 > 1, q_2 < q),$$

dalla (27) si ha:

$$m^2 - m(q - q_1 + 1) + q_1(q_1 - 1) = 0. \tag{28}$$

Siano m_1 ed m_2 le radici (intere positive) della (28). Deve aversi:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = q - q_1 + 1 = q_1(q_2 - 1) + 1, \\ m_1 m_2 = q_1(q_1 - 1). \end{cases} \tag{29}$$

Essendo q_1 una potenza di p (in quanto q_1 divide $q = p^s$), dalla prima delle (29) si ha che una almeno delle radici m_1, m_2 non è multipla di p. Sia essa m_1. Dalla seconda delle (29) si trae allora che m_2 deve essere multipla di q_1. Posto quindi $m_2 = aq_1$ (a intero ≥ 1), si ha, dalla seconda delle (29):

$$m_2 = aq_1 \quad , \quad m_1 a = q_1 - 1. \tag{30}$$

(*) Nella seduta del 22 giugno 1966.

Sostituendo le (30) nella prima delle (29), si ha:

$$a+1=q_1\,[a^2-a\,(q_2-1)+1]\,,$$

onde, posto $a^2-a\,(q_2-1)+1=b$, (b intero ≥ 1), si ottiene: $a=bq_1-1$. Dalla seconda delle (30) si ricava allora: $m_1=\frac{q_1-1}{bq_1-1}$. Poiché m_1 deve essere un intero, dovrà essere necessariamente $b=1$, $m_1=1$, $a=q_1-1$, $m_2=q_1\,(q_1-1)$. Sostituendo i valori testé trovati nella prima delle (29), si ottiene infine $q=q_1^2$, cioè q è un quadrato e $q_1=\sqrt{q}$.

Due casi sono ora possibili per K, in corrispondenza delle radici dell'equazione (28).

Se $m=m_1=1$, essendo $q_1=n-m$, si ha $n=\sqrt{q}+1$; ed è quindi $k=(n-1)\,q+m=q\sqrt{q}+1$. K è allora un $\{q\sqrt{q}+1, \sqrt{q}+1\}$-arco, di tipo $(1, \sqrt{q}+1)$; dalle (15), (17) e (18) si ricava poi:

$$(31)\qquad \begin{cases} u_n=u_{\sqrt{q}+1}=q-\sqrt{q}\,, & u_m=u_1=\sqrt{q}+1\,,\\ v_n=v_{\sqrt{q}+1}=q\,, & v_m=v_1=1\,,\\ t_n=t_{\sqrt{q}+1}=q^2+q-q\sqrt{q}\,, & t_m=t_1=q\sqrt{q}+1\,. \end{cases}$$

Un esempio di tale arco è dato dai punti di una curva hermitiana di un $S_{2,q}$, con q quadrato.

Per curva hermitiana di un piano di Galois $S_{2,q}$ ($q=p^{2h}$, p primo) [5], s'intende la curva H, luogo dei punti autoreciproci in un'antipolarità

$$u_i=\sum_{j=0}^{2} a_{ij}\,\bar{x}_j \qquad (a_{ij}=\bar{a}_{ji}\,,\ \det\|a_{ij}\|\neq 0),$$

ove $\bar{x}=\tau x$, τ essendo l'automorfismo involutorio del campo γ_q su cui è costruito $S_{2,q}$, dato da:

$$\tau: x\rightarrow x^{p^h}\quad,\quad x\in\gamma_q\,.$$

La curva H ha equazione: $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\,x_i\,\bar{x}_j=\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\,x_i\,x_j^{p^h}=0$. Essa è pertanto di ordine $n=p^h+1=\sqrt{q}+1$. Si dimostra (cfr. [5], Cap. V) che H è non singolare, che ciascuna retta tangente incontra H soltanto nel punto di contatto e che le rimanenti rette incontrano H in $\sqrt{q}+1$ punti distinti. Di qui segue che i punti di H costituiscono un $\{q\sqrt{q}+1, \sqrt{q}+1\}$-arco di tipo $(1, \sqrt{q}+1)$, per il quale valgono le (31).

In π_q, con q quadrato, chiameremo *arco hermitiano*, un $\{q\sqrt{q}+1, \sqrt{q}+1\}$-arco di tipo $(1, \sqrt{q}+1)$ e quindi per il quale valgono le (31). Introducendo tale denominazione, si può dire allora che, per $m=m_1=1$, K è un arco hermitiano.

Esaminiamo ora il caso rimanente, $m=m_2=\sqrt{q}\,(\sqrt{q}-1)=q-\sqrt{q}$. Essendo $\sqrt{q}=q_1=n-m$, si ha $n=q$ ed è quindi $k=(n-1)\,q+m=q^2-\sqrt{q}$.

K è allora un $\{q^2 - \sqrt{q}, q\}$–arco, di tipo $(q - \sqrt{q}, q)$. Dalle (15), (17), (18) si ricava poi:

$$(32) \qquad \begin{cases} u_n = u_q = q - \sqrt{q} & , \quad u_m = u_{q-\sqrt{q}} = \sqrt{q} + 1 \, , \\ v_n = v_q = q & , \quad v_m = v_{q-\sqrt{q}} = 1 \, , \\ t_n = t_q = q^2 - \sqrt{q} & , \quad t_m = t_{q-\sqrt{q}} = q + \sqrt{q} + 1 \, . \end{cases}$$

Consideriamo ora il complementare $\bar{K}$ di K. Esso risulta, per le (20), un $\{q + \sqrt{q} + 1, \sqrt{q} + 1\}$–arco, di tipo $(1, \sqrt{q} + 1)$. Poiché $\bar{m} = 1$, si ha che per due punti distinti di $\bar{K}$ passa una (ed una sola) $\bar{n}$–secante ad esso; inoltre, essendo $\bar{u}_{\bar{n}} = v_m = 1$ (per le (32)), si ha che due $\bar{n}$–secanti di $\bar{K}$ s'incontrano necessariamente in un punto di $\bar{K}$. Ne segue che $\bar{K}$ è un subpiano $\pi_{\sqrt{q}}$ di π_q le cui rette sono le sue $\bar{n}$–secanti. Dunque K è il complementare di un subpiano.

Si ha facilmente che il complementare di un arco hermitiano H è un $\{q^2 + q - q\sqrt{q}, q\}$–arco di tipo $(q - \sqrt{q}, q)$, minimale. Inoltre il duale d_2H è ancora un arco hermitiano e quindi il duale d_1H è il complementare di un arco hermitiano.

Infine il duale $d_1 \pi_{\sqrt{q}}$ di un subpiano $\pi_{\sqrt{q}}$ è ancora un subpiano e precisamente $\pi^*_{\sqrt{q}}$, onde $d_2 \pi_{\sqrt{q}}$ è il complementare del subpiano $\pi^*_{\sqrt{q}}$.

Si ha dunque la seguente proposizione:

VII. – *In* π_q, *un arco* K *a due caratteri che sia estremale coincide con un arco hermitiano (cioè con un* $\{q\sqrt{q} + 1, \sqrt{q} + 1\}$*–arco di tipo* $(1, \sqrt{q} + 1)$*) o con un subpiano* $\pi_{\sqrt{q}}$ *(cioè con un* $\{q + \sqrt{q} + 1, \sqrt{q} + 1\}$*–arco di tipo* $(1, \sqrt{q} + 1)$*), oppure con i complementari di questi archi. Un arco hermitiano ed il complementare di un subpiano sono archi massimali, mentre gli altri due sono minimali.*

In base alla proposizione V, VII ed a quanto precede, si ha che:

VIII. – *Sia* K *un arco a due caratteri di* π_q. *Se* K *ha specie* $m = 1$, *esso coincide con un arco hermitiano o con un subpiano* $\pi_{\sqrt{q}}$. *Se* K *ha grado* $n = q$, *esso coincide con il complementare di un arco hermitiano o con il complementare di un subpiano* $\pi_{\sqrt{q}}$.

Consideriamo ora un $\{k, n\}$–arco K a due caratteri tale che da ogni suo punto esterno esca una sola n–secante. Dalla prima delle (15), in cui si ponga $u_n = 1$, si ricava $k = mq + n$, ossia K è minimale e quindi in forza della proposizione VII, K coincide con un subpiano $\pi_{\sqrt{q}}$ oppure col complementare di un arco hermitiano (per i quali è di fatto $u_n = 1$). Si ha dunque che:

IX. – *Un* $\{k, n\}$*–arco* K *a due caratteri di un piano* π_q, *tale che da ogni suo punto esterno esca una sola n–secante, risulta o un subpiano* $\pi_{\sqrt{q}}$ *di* π_q, *oppure il complementare di un arco hermitiano.*

7. In forza della proposizione VIII, si ha che, per completare lo studio dei $\{k, n\}$–archi a due caratteri, di tipo (m, n), restano da esaminare quelli per cui $m \geq 2, n \leq q - 1$.

In questo numero daremo delle condizioni aritmeticamente necessarie per l'esistenza di tali archi. Inoltre daremo esempi di archi siffatti, aritmeticamente possibili.

Sia dato un $\{k, n\}$–arco di tipo (m, n) di π_q. Sostituendo le (18) nella (2) (per $t_s = 0$, con $s \neq m, n$), si ha, con facili calcoli, che k deve soddisfare l'equazione:

$$(33) \qquad k^2 - k[n + m + q(n + m - 1)] + mn(q^2 + q + 1) = 0 .$$

Tale equazione deve dunque ammettere radici intere, per il che occorre e basta che il suo discriminante Δ sia un quadrato positivo o nullo. Si ha:

$$(34) \quad \Delta = q^2[(n-m)^2 - 2(n+m)+1] + 2q[n(n-1)+m(m-1)] + (n-m)^2 .$$

Risolvendo la (33) si ottiene:

$$k = \frac{1}{2}[n + m + q(n + m - 1) \pm \sqrt{\Delta}] .$$

Sostituendo tali valori di k nella (19), si ottiene:

$$(35) \qquad q \geq \frac{n(n-1)}{m} + m - n .$$

Dalle (15) e (17) si ha $v_n = u_n + \frac{q}{n-m}$, $v_m = u_m - \frac{q}{n-m}$. Dunque $n-m$ deve essere un divisore di q. Si ha quindi:

X. – *Se esiste un* $\{k, n\}$*–arco* K *di tipo* (m, n) *in* π_q, k *deve soddisfare la* (33), *il secondo membro della* (34) *deve essere un quadrato non negativo, deve valere la disuguaglianza* (35). *Inoltre* $n - m$ *deve dividere* q.

Esaminiamo ora le prime possibilità per m ed n. Dovendo essere $2 \leq m \leq \leq n - 2$, $n \leq q - 1$, il primo caso da esaminare è $m = 2$, $n = 4 \leq q - 1$. In tale eventualità, dalla (34) si ha: $\Delta = -7q^2 + 28q + 4$. Dovendo essere $q \geq 5$, risulta $\Delta < 0$. Dunque *non esistono* $\{k, 4\}$*–archi di tipo* $(2, 4)$ *in* π_q. Il successivo caso $m = 2$, $n = 5 \leq q - 1$, porta: $\Delta = -4q^2 + 44q + 9$ che, per $q > 11$, risulta negativo, quindi *non esistono in* π_q $\{k, 5\}$*–archi di tipo* $(2, 5)$, *per* $q > 11$. Per $q = 9$, risulta $\Delta = 81$. Inoltre è soddisfatta anche la (35) e l'equazione (33) dà per k i valori 35 e 26. Sono dunque aritmeticamente possibili un $\{35, 5\}$–arco ed un $\{26, 5\}$–arco, ambedue di tipo $(2, 5)$ in un piano π_9. Altri esempi di archi aritmeticamente possibili sono un $\{42, 6\}$–arco ed un $\{78, 6\}$–arco, ambedue di tipo $(2, 6)$, in π_{16}.

8. In un piano π_q (q quadrato) diremo che un arco hermitiano H gode della *proprietà di reciprocità*, se per esso è verificata la seguente proprietà grafica:

Scelti comunque su H *quattro punti* A, B, C, D *a tre a tre non allineati, e dette* a, b, c, d *le* 1*–secanti ad* H *rispettivamente in* A, B, C, D *se accade che il punto* $a \cap b$ *appartiene alla retta* CD, *allora il punto* $c \cap d$ *deve appartenere alla retta* AB.

Dimostreremo che *se* H *è un arco hermitiano di* π_q *soddisfacente alla condizione di reciprocità, per ogni punto* Q *esterno ad* H, *le* $\sqrt{q}+1$ *rette* 1*–secanti per* Q *ad* H *toccano* H *in altrettanti punti allineati.*

Quanto sopra si prova facilmente se $q = 4$. Supporremo perciò $q \geq 9$. Ragionando per assurdo, supponiamo che da Q escano tre 1–secanti a, b, b' che toccano H rispettivamente in tre punti A, B, B′ non allineati. Sia r una delle $q - \sqrt{q}$ rette $(\sqrt{q} + 1)$–secanti di H per Q. Poiché $\sqrt{q} + 1 \geq 4$, (supponendosi $q \geq 9$), su r esistono due punti distinti C e D di H nessuno dei quali appartiene né alla retta AB, né alla retta AB′. Dunque A, B, C, D e A, B′, C, D sono due quaterne di punti a tre a tre non allineati. Siano c e d le 1–secanti in C e D ad H. Per la proprietà di reciprocità relativa alla quaterna A, B, C, D, il punto $c \cap d$ deve appartenere alla retta AB (in quanto $Q = a \cap b$ appartiene alla retta CD); ma esso, per analoga ragione, deve appartenere anche alla retta AB′, onde deve coincidere con A, e ciò è manifestamente assurdo. Ne segue l'asserto.

Nel seguito – salvo esplicito avviso in contrario – considereremo sempre archi hermitiani soddisfacenti alla condizione di reciprocità. Per un siffatto arco H, diremo *polare di un punto* P *di* π_q *rispetto ad* H la retta p congiungente i $\sqrt{q} + 1$ punti di contatto delle 1–secanti per P ad H, se P non appartiene ad H, la 1–secante (unica) in P ad H, se P appartiene ad H. Il punto P si dirà *polo* della retta p.

Data comunque una retta p in π_q essa è la polare di un ben determinato punto P di π_q. Infatti, se p è una 1–secante di H, il punto P è il punto d'incontro della 1–secante con H, altrimenti p è una $(\sqrt{q} + 1)$–secante. Siano A e B due punti di $p \cap H$, a e b le tangenti in essi e P il punto $a \cap b$. Attualmente P non appartiene ad H e la polare di P è la retta p. Allora le $\sqrt{q} + 1$ rette 1–secanti per P ad H debbono incontrare p nei $\sqrt{q} + 1$ punti $p \cap H$. Ciò val quanto dire che le $\sqrt{q} + 1$ rette 1–secanti di H nei punti $p \cap H$ passano tutte per P.

Da quanto ora provato, si ha che la corrispondenza che associa ad un punto P di π_q la sua polare è *biunivoca*. Dimostriamo che essa è una *correlazione involutoria*, cioè che se P varia su una retta r, la polare di P varia descrivendo il fascio di rette con centro in R, polo di r; e viceversa. Quanto sopra è evidente se r, è una 1–secante di H. Se r è una $(\sqrt{q} + 1)$–secante, siano C e D due punti distinti di $r \cap H$. Le 1–secanti c e d in C e D ad H passano per il polo R di r e lo stesso accade per tutte le 1–secanti nei punti di $r \cap H$. Siano P un punto di r non appartenente ad H e p la polare di P. Essa interseca r in un punto non appartenente ad H (altrimenti r risulterebbe una 1–secante di H). Siano A e B due distinti punti di $p \cap H$ ed a e b le 1–secanti in essi ad H. Risulta $a \cap b = P$, onde per la proprietà di reciprocità, cui soddisfa H relativamente ai quattro punti a tre a tre non allineati A, B, C, D, si ha che la retta $p = AB$ passa per R. Dunque, quando P varia nei $q + 1$ modi possibili su r, la sua polare varia descrivendo le $q + 1$ rette del fascio con centro in R. Ne segue l'asserto.

Un arco H determina dunque – nel modo anzidetto – una correlazione involutoria. Due punti di π_q tali che l'uno appartenga alla polare dell'altro si diranno reciproci. Il luogo dei punti autoreciproci, rispetto a tale correlazione, coincide quindi con H.

È noto che in un $S_{2,q}$ una qualsiasi correlazione involutoria (non degenere) è una polarità rispetto ad una conica, oppure è una antipolarità (cfr. n. 6) rispetto ad una curva hermitiana. Allora se π_q coincide con un piano di Galois, la correlazione involutoria determinata da H, non potendo essere una polarità, in quanto (essendo $\sqrt{q} + 1 > 2$) H non è una conica, è un'antipolarità ed H è una curva hermitiana. In un qualsiasi piano grafico π_q chiameremo ancora antipolarità rispetto ad H la correlazione involutoria determinata da H. Si ha dunque la seguente proposizione:

XI. – *In un piano* π_q, *sia dato un arco hermitiano* H, *soddisfacente alla condizione di reciprocità. Se si fa corrispondere ad ogni punto* P *di* H *la* 1*–secante (unica) per* P *ad* H *e ad ogni punto* P *esterno ad* H *la polare di* P *rispetto ad* H *(cioè la retta congiungente i punti di contatto delle* 1*–secanti per* P *ad* H), *si ottiene una correlazione involutoria che diremo antipolarità rispetto ad* H. *In un piano di Galois* $S_{2,q}$, *ogni arco hermitiano, soddisfacente alla condizione di reciprocità, risulta una curva hermitiana.*

In base alla proposizione VIII ed alla XI si ha che:

XII. – *In un piano di Galois* $S_{2,q}$ *un* $\{k, n\}$*–arco di tipo* $(1, n)$ *risulta o un subpiano o un arco hermitiano. Se quest'ultimo gode della proprietà di reciprocità, esso è una curva hermitiana.*