Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franca Busulini

Sopra una $V_3^{(6)}$ di Fano priva di punti doppi e birazionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.6, p. 1010–1013.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_6_1010_0>

Matematica. — *Sopra una* $V_3^{(6)}$ *di Fano priva di punti doppi e birazionale.* Nota di FRANCA BUSULINI, presentata [*] dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

ZUSAMMENFASSUNG. — Man gibt ein Modell einer Manigfaltigkeit $V_3^{(6)}$ Durchschnitt einer kubischen und einer quadratischen Hyperfläche des 5 - dimensionalen linearen Raumes, die rational ist, obwohl sie keine Doppelpunkte hat. Also ist die Vermutung von G. Fano, dass die allgemeine $V_3^{(6)}$ nicht rational ist, eine offene Frage [8].

Sviluppando problemi generali di analisi diofantea con metodi seguiti nello studio di varietà unirazionali [1, n. 5], si ebbe occasione di dare della $V_3^{(6)} = V_4^{(2)} \cap V_4^{(3)} \subset S_5$ di Fano [4, 5] senza punti doppi, che però contiene *un piano*, una rappresentazione parametrica unirazionale molto più semplice di quella del caso generale data da Enriques [2, 7].

Trattasi precisamente, come in questa Nota [1] si verifica, di una corrispondenza unirazionale di indici (1, 2), che dà luogo ad una involuzione di de Jonquières dell'S_3.

Si considera poi una $V_3^{(6)}$ senza punti doppi, che contiene però *due piani*, e si verifica, indicandone la effettiva rappresentazione parametrica, che essa è *birazionale*.

Ciò è in contrasto con il risultato di Fano che [4, 5]: una $V_3^{(6)}$, con la sola ipotesi di generalità di essere priva di punti doppi, non sia birazionale.

Si dovrebbe dunque provare, con metodi più penetranti [7, 9], se la $V_3^{(6)} = V_4^{(2)} \cap V_4^{(3)} \subset S_5$ *generale* e quella contenente un *solo piano* sono *birazionali oppure no*.

Si presenta, nel nostro caso, una situazione analoga alla $V_4^{(3)}$ generale dell'S_5, di cui ancora non si sa se essa è birazionale oppure no; tuttavia si conoscono particolari $V_4^{(3)} \subset S_5$ senza punti doppi, ad esempio contenenti due piani complementari, che sono birazionali.

1. Consideriamo uno *spazio lineare* S_5 sopra il corpo dei *numeri complessi* (oppure sopra un corpo commutativo algebricamente chiuso e di caratteristica zero) e fissiamo un suo *piano* α.

Siano $V_4^{(2)}$ e $V_4^{(3)}$ due ipersuperfici del *secondo* e del *terzo* ordine dell'S_5 (*quadrica* e *cubica*) che passano per il piano α e sono ulteriormente generiche. La loro intersezione è una

$$V_3^{(6)} = V_4^{(2)} \cap V_4^{(3)}, \tag{1}$$

che *contiene il piano* α e, come si verifica facilmente (cfr. n. 2), è *priva di punti doppi*.

(*) Nella seduta del 22 giugno 1966.

(1) Fatta nei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

Della generica $V_3^{(6)}$ del tipo (1) Enriques [2] ha assegnato una rappresentazione unirazionale di indici $(1, \nu)$, con ν abbastanza elevato. Nel nostro caso particolare, cioè che la $V_3^{(6)}$ contenga il piano α, pur essendo priva di punti doppi, si può con procedimento diverso dare della $V_3^{(6)}$ una rappresentazione unirazionale di indici $(1, 2)$. Infatti [1, n. 5]:

Introduciamo nell'S_5 un sistema di coordinate

$$P = (x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in S_5 \tag{2}$$

in modo che il dato piano α abbia le equazioni $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ e indichiamo con β il piano ad esso complementare di equazioni $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Consideriamo come esempio la $V_3^{(6)} = V_4^{(2)} \cap V_4^{(3)}$ data dal seguente sistema di equazioni

$$\sum_0^2{}_i\, x_i y_i = 0 \quad , \quad \sum_0^2{}_i\, (x_i^2 y_i + y_i^3) = 0. \tag{3}$$

Con semplici calcoli si verifica che questa $V_3^{(6)}$, contenente il piano α, è priva di punti doppi (cfr. n. 2).

L'S_3 della stella Σ_2 avente come sostegno il piano α, ottenuto congiungendo α con un punto generico

$$Y = (0, 0, 0, y_0, y_1, y_2) \in \beta, \tag{4}$$

sega la $V_4^{(2)}$ e la $V_4^{(3)}$, oltre che nel piano α, secondo un piano π e secondo una quadrica Q.

Poiché un punto generico P dell'S_3 ha le coordinate

$$P = (x_0, x_1, x_2, \lambda y_0, \lambda y_1, \lambda y_2),$$

con y_0, y_1, y_2 *costanti;*

$$(x_0, x_1, x_2, \lambda) \tag{5}$$

sono coordinate (omogenee) di P nell'S_3. Dalle (3) risulta allora che le equazioni (nelle variabili x_0, x_1, x_2, λ) di π e di Q nell'S_3 sono:

$$\sum_0^2{}_i\, x_i y_i = 0 \quad , \quad \sum_0^2{}_i\, (x_i^2 y_i + \lambda^2 y_i^3) = 0. \tag{6}$$

Le tracce su α di π e Q sono rispettivamente una retta $r = \pi \cap \alpha$ e una conica $C = Q \cap \alpha$, fra di loro associate e che variano con l'$S_3 \in \Sigma_2$ in due sistemi lineari di dimensione 2.

Le equazioni di questi sistemi lineari nel piano $\alpha \subset S_3$ si ottengono dalle (6) facendo sistema con l'equazione $\lambda = 0$ del piano α:

$$\sum_0^2{}_i\, x_i y_i = 0 \quad , \quad \sum_0^2{}_i\, x_i^2 y_i = 0. \tag{7}$$

In esse le x_i sono le variabili e le y_i i parametri. Un punto generico $X = (x_0, x_1, x_2, 0, 0, 0) \in \alpha$ impone, come si vede dalle (7), ad una retta r

e una conica C associate due condizioni lineari, quindi individua l'$S_3 \in \Sigma_2$ passante per il punto $Y = (0, 0, 0, y_0, y_1, y_2)$ con:

$$y_0 = x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \quad , \quad y_1 = x_2 x_0^2 - x_2^2 x_0 \quad , \quad y_2 = x_0 x_1^2 - x_0^2 x_1 . \tag{8}$$

Pertanto il punto $X \in \alpha$, individuando l'$S_3 \in \Sigma_2$, individua la conica $\Gamma = \pi \cap Q \subset S_3$, che contiene X.

Questa conica Γ è quindi la sezione, oltre il piano α, della $V_3^{(6)}$ con l'S_3:

$$\Gamma = V_3^{(6)} \cap S_3 - \alpha . \tag{9}$$

Al variare dell'$S_3 \in \Sigma_2$ si ottiene dunque sulla $V_3^{(6)}$ una congruenza razionale K_2 di coniche Γ di indice 1. Una delle coniche Γ sega il piano α nella coppia di punti $r \cap C$.

Stabiliamo una *proiettività* Ω fra il piano α e una *stella di rette* $\Sigma_2^* \subset S_3^*$. Quindi nella Ω ad un punto $X \in \alpha$ corrisponde una retta $c \in \Sigma_2^*$.

Tramite il punto X possiamo stabilire fra la conica Γ individuata da X e la associata retta c una determinata proiettività Π_x.

In questo modo si è generata una *corrispondenza algebrica* generalmente *univoca*, quindi *razionale*, fra l'S_3^* e la data $V_3^{(6)}$.

Infatti: ad un punto generico $P^* \in S_3^*$ corrisponde la retta $c \in \Sigma_2^*$ che la contiene, alla retta c corrisponde nella Ω un punto $X \in \alpha$ e questi individua una conica $\Gamma \subset V_3^{(6)}$.

Nella Π_x a P^* è associato un punto $P \in \Gamma$. Pertanto $P^* \in S_3^*$ individua $P \in V_3^{(6)}$.

La corrispondenza razionale così generata è di indici (1, 2) poiché una conica Γ, intersecando il piano α in *due punti* X e X_1, è la corrispondente di *due rette* c e c_1 della stella Σ_2^*.

Osserviamo ora che le coppie di punti $P, P_1^* \in S_3^*$, cui corrisponde un medesimo punto $P \in V_3^{(6)}$, costituiscono una *involuzione* dell'S_3^*. Questa involuzione trasforma in sé la stella di rette Σ_2^* e perciò si può chiamare una involuzione di de Jonquières.

Se la congettura di Fano che la $V_3^{(6)}$ generale non è birazionale [4, 5], fosse valida anche per quelle contenenti un piano, si potrebbe affermare che: *Esistono nell'*S_3 *involuzioni di de Jonquières non razionali.*

2. Supponiamo ora che una $V_3^{(6)}$, priva di punti doppi, *contenga i due piani* complementari α e β.

Consideriamo la particolare $V_3^{(6)}$ intersezione delle $V_4^{(2)}$ e $V_4^{(3)}$ date dal seguente sistema di equazioni:

$$\sum_0^2{}_i\, x_i y_i = 0 \quad , \quad \sum_0^2{}_i\, (x_i^2 y_i + x_i y_i^2) = 0 . \tag{10}$$

Da un semplice controllo risulta che le due ipersuperfici (10) sono prive di punti doppi. Ma anche la loro intersezione $V_3^{(6)}$ è priva di punti doppi, poiché: *in nessun punto della* $V_3^{(6)}$ *le due ipersuperfici* (10) *hanno il medesimo iperpiano tangente.*

Infatti, scritte le equazioni dei due iperpiani rispettivamente tangenti alle (10) in un medesimo punto P:

$$\begin{cases} \sum_0^2{}_i (y_i X_i + x_i Y_i) = 0 , \\ \sum_0^2{}_i [y_i (2x_i + y_i) X_i + x_i (x_i + 2y_i) Y_i] = 0 , \end{cases}$$

questi coincidono soltanto se

$$2x_0 + y_0 = 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2 = x_0 + 2y_0 = x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2 ,$$

e quindi

$$x_0 = y_0 = x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = x_3 = y_3 . \tag{11}$$

Ma il punto unità, di coordinate (11), non appartiene né all'una, né all'altra delle due ipersuperfici (10); c. v. d.

Possiamo dunque intanto affermare che: *la generale* $V_3^{(6)}$ *che contenga due piani complementari non ha punti doppi.*

È ora immediato dimostrare che: la $V_3^{(6)} = V_4^{(2)} \cap V_4^{(3)} \subset S_5$, *priva di punti doppi, ma contenente due piani complementari, è birazionale.*

Infatti, con riferimento alla congruenza K_2 di coniche Γ segate sulla $V_3^{(6)}$ dagli S_3 della stella Σ_2, il piano β è una superficie (razionale) unisecante le coniche Γ della congruenza K_2.

Pertanto [3, 6]: la nostra $V_3^{(6)}$ è birazionale; anzi: *essa può rappresentarsi birazionalmente sopra un* S_3^* *in modo che alle coniche* Γ *della congruenza* K_2 *corrispondano le rette di una stella.*

BIBLIOGRAFIA.

[1] BUSULINI F., *Alcuni problemi di analisi diofantea di grado superiore*, «Atti Ist. Ven. di SS.LL.AA.», *119*, 267 (1960).

[2] ENRIQUES F., *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*, «Rend. Acc. Lincei», *21* (5), 81 (1912).

[3] ID., *Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili*, «Annali di Mat.», *20* (3), 109 (1913).

[4] FANO G., *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, «Atti Acc. Torino», *43*, 973 (1908).

[5] ID., *Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli*, «Atti Acc. Torino», *50*, 1067 (1915).

[6] MORIN U., *Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali*, «Rend. Seminario Mat. Università Padova», *9*, 1 (1938).

[7] ROTH L., *Algebraic threefolds with special regard to problems of razionality*, Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete, Heft 6, Springer, Berlin (1955).

[8] ID., *Alcune* V_3 *irrazionali a generi nulli*, «Rend. Acc. Lincei», *12* (8), 265 (1952).

[9] SEGRE B., *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche*, «Annali di Mat.», *33* (4), 5 (1952).