
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CLAUDIO BAIOCCHI

Sulle soluzioni del sistema di Navier-Stokes in dimensione n . Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 40 (1966), n.6, p.
1006–1009.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_6_1006_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sulle soluzioni del sistema di Navier-Stokes in dimensione n .* Nota I di CLAUDIO BAIOCCHI^(*), presentata^(**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RÉSUMÉ. — On étudie quelques propriétés de régularité dans la variable temporelle des solutions du système de Navier-Stokes en dimension n .

INTRODUZIONE.

È ben noto (cfr. ad esempio Lions [8]⁽¹⁾ e Prodi [18] dove si può trovare anche un'ampia bibliografia relativa al sistema di Navier-Stokes) che per i problemi di evoluzione relativi alle equazioni di Navier-Stokes in dimensione n :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} \cdot u_j(x, t) - \nu \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = f_i(x, t) \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

($x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ variabili spaziali, t variabile temporale) i teoremi di esistenza di soluzioni « turbolente » (secondo la nomenclatura di Leray) danno soluzioni in classi molto ampie nelle quali (salvo il caso $n = 2$; cfr. Lions-Prodi [13]) non sono noti teoremi di unicità; sono tuttavia note (cfr. Lions [8], [10]) alcune costruzioni di soluzioni $\{u(x, t), p(x, t)\}$ con $u(x, t) \equiv \{u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$ che presentano rispetto a $u(x, t)$ una regolarità in t maggiore di quella richiesta per poter impostare il problema; in particolare Lions [8] dimostra che per $n \leq 4$ esiste una soluzione $\{u, p\}$ del problema misto del tipo Cauchy-Dirichlet tale che $u(x, t)$ ha derivata frazionaria rispetto a t di ordine γ di quadrato sommabile in x e t per ogni $\gamma < 1/4$.

In questo lavoro verranno ottenuti alcuni risultati di regolarità del tipo predetto; il principale (enunciato nel teorema 4.3) è che ogni soluzione $\{u, p\}$ delle (1) è tale che $u(x, t)$ ha derivata frazionaria rispetto a t di ordine $2/(n+2)$ di quadrato sommabile in x e t .

Il N° 1 contiene alcuni richiami e definizioni; nel N° 2 sono studiate le proprietà di una famiglia di spazi che intervengono nel problema di Navier-

(*) Istituto Matematico dell'università di Pavia. Lavoro eseguito nell'ambito delle attività svolte nei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 22 giugno 1966.

(1) I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine della Nota III.

Stokes; nel N° 3 sono richiamati alcuni risultati sostanzialmente noti (anche se sotto forma leggermente diversa; cfr. ad esempio Kiselev-Ladyzenskaia [4], Ladyzenskaia [5]); infine nel N° 4, dopo aver trasformato l'equazione funzionale che definisce il problema in una equazione distribuzionale, ottengo i risultati principali.

Desidero ringraziare il prof. Lions ed il prof. Prodi per le utili discussioni avute sull'argomento.

I. - POSIZIONE DEL PROBLEMA.

1.1. Sia Ω un aperto limitato dello spazio euclideo a n dimensioni $\mathbf{R}^n$ il cui punto generico sarà indicato con $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$; supporrò $n \geq 2$.

Avrò bisogno su Ω di una regolarità crescente col numero di dimensioni; per fissare le idee supporrò Ω di classe C^∞ (2), ipotesi largamente sufficiente a trattare il problema per qualunque n , ma che può essere attenuata caso per caso.

In sintesi supporrò che:

(1.1) Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ di classe C^∞ ; $n \geq 2$.

Con notazioni usuali se f è una distribuzione su Ω con $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ indico la derivata di f rispetto alla variabile x_i nel senso delle distribuzioni su Ω (cfr. Schwartz [21]); con $\text{grad} f$ indico il vettore di componenti $\{D_i f\}_{i=1, \dots, n}$; se $u \equiv \{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ è una n -upla di distribuzioni su Ω con $\text{div } u$ indico $\sum_{i=1}^n D_i u_i$; con $(\cdot)$ indico l'usuale prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$; ad esempio se $u \equiv \{u_i\}$ e $v \equiv \{v_i\}$ con $(u \cdot \text{grad}) v$ indico il vettore la cui componente i -esima è data da $\sum_{j=1}^n u_j D_j v_i$.

Farò uso degli spazi di Sobolev su Ω ; per una definizione degli spazi di cui farò uso e delle loro proprietà rinvio a Magenes [14], Nikolskij [15]. *Tutte le funzioni considerate saranno a valori reali*; così ad esempio con $W^{\alpha, p}(\Omega)$ (α reale ≥ 0 , $1 \leq p \leq +\infty$) indicherò lo spazio (di Banach sul corpo reale) delle (classi di) funzioni definite su Ω , a valori reali, misurabili, di « ordine di derivazione » α sommabili ad esponente p (ovvero limitate se $p = +\infty$). $W^{0, p}(\Omega)$ sarà anche indicato $L^p(\Omega)$; lo spazio di Hilbert $W^{\alpha, 2}(\Omega)$ sarà anche indicato $H^\alpha(\Omega)$; $H_0^\alpha(\Omega)$ indicherà l'aderenza di $\mathfrak{D}(\Omega)$ in $H^\alpha(\Omega)$. Quando non ci sia possibilità di equivoco indicherò con L^p lo spazio $\{L^p(\Omega)\}^n$; analoga posizione per H^α , H_0^α , $W^{\alpha, p}$.

(2) Nel senso che, indicando con Γ la frontiera di Ω , Γ è una varietà infinitamente differenziabile ad $n-1$ dimensioni; ed $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, considerato come varietà a bordo di classe C^∞ , ha bordo Γ .

1.2. Si ponga per brevità $\mathfrak{D}_d = \{\varphi \in \{\mathfrak{D}(\Omega)\}^n; \operatorname{div} \varphi = 0\}$. Si indichi con H l'aderenza di $\mathfrak{D}_d$ in L^2 ; H è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare indotto da L^2 ; prodotto scalare e norma in H saranno indicati rispettivamente $(,)$ e $|\cdot|$.

Si indichi con V l'aderenza di $\mathfrak{D}_d$ in H_0^1 ; per $u, v \in V$ si ponga $((u, v)) = \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v)$; $\|u\| = ((u, u))^{1/2}$; si verifica facilmente che tale norma induce su V una topologia equivalente a quella indotta da H_0^1 .

Per $u, v, w \in \mathfrak{D}_d$ si pone $(dx = dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_n)$: $b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i D_i v_j w_j dx$; e si verifica facilmente che:

$$(1.2) \quad b(u, v, w) = -b(u, w, v) \quad ; \quad |b(u, v, w)| \leq C \cdot \|u\| \cdot \|w\| \cdot \|v\|_{L^\infty},$$

(con la lettera C , qui e nel seguito, indico una generica costante; qui C dipende da Ω e da n ma non da u, v, w).

Ne segue, con ragionamenti di carattere usuale, che per ogni $v \in \mathfrak{D}_d$ l'applicazione $\{u, w\} \rightarrow b(u, v, w)$ si prolunga in una applicazione lineare continua (ancora indicata allo stesso modo) di $V \times V$ in $\mathbf{R}^1$; e la (1.2) continua a valere per $u, w \in V$ e $v \in \mathfrak{D}_d$ (maggiorazioni più precise in seguito).

1.3. Siano T_0, T_1 due numeri reali con $-\infty < T_0 < T_1 < +\infty$; t indicherà la variabile nell'intervallo $]T_0, T_1[$.

Indicherò con $\mathfrak{D}(T_0, T_1; \mathfrak{A})$ ($\mathfrak{A}$ spazio vettoriale topologico) lo spazio delle funzioni definite in $]T_0, T_1[$, a valori in $\mathfrak{A}$, infinitamente differenziabili ed a supporto compatto contenuto in $]T_0, T_1[$; $\mathfrak{D}(T_0, T_1; \mathfrak{A})'$ sarà lo spazio duale di $\mathfrak{D}(T_0, T_1; \mathfrak{A})$ ⁽³⁾ che, per le ipotesi che farò in seguito su $\mathfrak{A}$, sarà identificabile allo spazio $\mathfrak{D}'(T_0, T_1; \mathfrak{A}')$ delle distribuzioni su $]T_0, T_1[$ a valori in $\mathfrak{A}'$ (cfr. Schwartz [22], Lions [8]). L'apice in alto indicherà la derivazione rispetto a t , derivazione che sarà sempre intesa nel senso delle distribuzioni a valori vettoriali (cfr. sempre Schwartz [22]).

Farò anche uso degli spazi $W^{\alpha, p}(T_0, T_1; \mathfrak{B})$ (α reale ≥ 0 ; $1 \leq p \leq +\infty$; $\mathfrak{B}$ spazio di Banach) che si possono definire in modo analogo a come si definiscono gli spazi $W^{\alpha, p}(\Omega)$ (cfr. sempre Nikolskij [15]); in particolare lo spazio $W^{0, p}(T_0, T_1; \mathfrak{B})$ sarà indicato $L^p(T_0, T_1; \mathfrak{B})$; e lo spazio $W^{\alpha, 2}(T_0, T_1; \mathfrak{B})$ (che è uno spazio di Hilbert se $\mathfrak{B}$ è uno spazio di Hilbert) sarà indicato $H^\alpha(T_0, T_1; \mathfrak{B})$.

1.4. Si indichi con Φ lo spazio $\mathfrak{D}(T_0, T_1; \mathfrak{D}_d)$.

Si fissi ad arbitrio un numero $\nu > 0$; e sia $f \in \Phi'$; pongo le definizioni seguenti:

DEFINIZIONE 1.1. - Si dice che $u = u(x, t)$ è soluzione debole del sistema di Navier-Stokes sull'intervallo $]T_0, T_1[$ relativa al dato f se valgono

(3) Con $\mathcal{K}'$ indicherò lo spazio duale forte dello spazio $\mathcal{K}$; se $h \in \mathcal{K}$ ed $h' \in \mathcal{K}'$ indicherò con $\langle h', h \rangle_{\mathcal{K}', \mathcal{K}}$ la dualità tra $\mathcal{K}'$ ed $\mathcal{K}$.

le relazioni:

$$(1.a) \quad u \in L^2(T_0, T_1; V),$$

$$(1.b) \quad u \text{ verifica l'equazione funzionale:}$$

$$(1.3) \quad \int_{T_0}^{T_1} [\nu \langle u(t), \varphi(t) \rangle - b(u(t), \varphi(t), u(t)) - \langle u(t), \varphi'(t) \rangle] dt = \langle f, \varphi \rangle_{\Phi', \Phi} \quad \forall \varphi \in \Phi$$

(si osservi che per la (1.2) e la (1.a) $b(u, \varphi, u) \in L^1(T_0, T_1)$ quindi la (1.3) ha senso).

DEFINIZIONE 1.2. - Si dice che $u = u(x, t)$ è soluzione debole limitata del sistema di Navier-Stokes sull'intervallo $]T_0, T_1[$ relativa al dato f se valgono le (1.a), (1.b) e inoltre:

$$(1.c) \quad u \in L^\infty(T_0, T_1; H).$$

Si osservi che per impostare in forma debole il problema di Cauchy (cfr. Lions [8], [10], Prodi [18]) ovvero il problema periodico (cfr. Prodi [16], Prouse [19]) per il sistema di Navier-Stokes si suole cercare una u che verifica un'equazione funzionale del tipo della (1.3) ma che deve essere soddisfatta per una classe di *test-functions* più ampia di Φ ; e tale equazione si riduce alla (1.3) se si prende la *test-function* $\varphi \in \Phi$. Ciò giustifica le definizioni 1.1 e 1.2; cfr. anche più avanti le osservazioni 4.1 e 4.5.