Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elisa Udeschini Brinis

Equazioni di campi spinoriali dedotte da un'unica lagrangiana. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.5, p. 828–832.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_828_0>

Fisica matematica. — *Equazioni di campi spinoriali dedotte da un'unica lagrangiana* (*). Nota II di ELISA UDESCHINI BRINIS, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY.— In the first paper a symmetric second-rank spinor was shown to be expressible by one potential spinor with one dotted and one undotted index. This result allowed us, when considering a general field defined by a second-rank symmetric spinor and by his complex conjugate, to derive all field equations from a variational principle, by varying the potential spinor and his complex conjugate.

In this second paper former results are applied: by choosing the Lagrangian density in a suitable way, Maxwell's equations in spinor form and Dirac equations for particles of spin one are derived.

3. DEDUZIONE VARIAZIONALE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL IN FORMA SPINORIALE. – Come prima applicazione dei risultati stabiliti nella Nota I (***) (della quale proseguo la numerazione dei paragrafi e delle formule), particolarizziamo le densità lagrangiane (16) e (24) in modo da ottenere le equazioni del campo elettromagnetico nel vuoto, in forma spinoriale, rispettivamente in assenza di cariche ed in presenza di una assegnata distribuzione elettrica.

Se Φ_{AB} è lo spinore doppio simmetrico corrispondente, secondo le (4) e (5), al tensore elettromagnetico reale $F_{\alpha\beta}$; $\varphi_{\mathbf{RS}}$ e $\psi_{\mathbf{RS}}$ (****) sono gli spinori corrispondenti, secondo le (7) e (7') ai due potenziali elettromagnetici φ_α e ψ_α ed $j^{\mathbf{RS}} = g_\alpha{}^{\mathbf{RS}} j^\alpha$ è lo spinore doppio corrispondente al vettore reale j^α che dà la distribuzione elettrica, basterà scegliere come lagrangiane le:

$$\mathfrak{L} = 2\,(\Phi_{AB}\,\Phi^{AB} + \overline{\Phi}_{AB}\,\overline{\Phi}^{AB}) \qquad \text{per campo neutro e:} \tag{25}$$

$$\mathfrak{L} = 2\,(\Phi_{AB}\,\Phi^{AB} + \overline{\Phi}_{AB}\,\overline{\Phi}^{AB}) - \frac{1}{2} j^{\mathbf{RS}}\,\varphi_{\mathbf{RS}} \qquad \text{per campo non neutro.} \tag{26}$$

Le (25) e (26) sono le corrispondenti spinoriali delle lagrangiane $\mathfrak{L} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}\,F^{\alpha\beta}$ ed $\mathfrak{L} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}\,F^{\alpha\beta} - j^\alpha \varphi_\alpha$ che permettono di dedurre le equazioni del campo elettromagnetico in forma tensoriale (9).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1966.

(***) Presentata nella seduta del 12 febbraio 1966.

(****) Per ragioni tipografiche gli indici in grassetto sostituiscono gli indici puntati.

(9) Cfr. B. FINZI, loco citato ed E. UDESCHINI BRINIS, loco citato.

La (26) si può far rientrare nello schema (24) perché $j^{\mathbf{RS}}$ si ritiene assegnato e pertanto non subisce la variazione δ. Lo stesso è stato fatto, nei lavori citati, con il vettore j^α; ciò non pregiudica la possibilità di dedurre la densità di corrente da un principio variazionale, operando nell'ambito complesso.

Se $\mathfrak{L}$ è data dalle (25), le equazioni (21) diventano:

$$(27) \qquad \begin{cases} \Phi^{AS}/^{\mathbf{R}}{}_{A} + \Phi^{\mathbf{AR}}/_{\mathbf{A}}{}^{S} = 0 \\ \Phi^{AS}/^{\mathbf{R}}{}_{A} - \Phi^{\mathbf{AR}}/_{\mathbf{A}}{}^{S} = 0 \end{cases}$$

e quindi:

$$(28) \qquad \begin{cases} \Phi^{AS}/^{\mathbf{R}}{}_{A} = 0 \\ \Phi^{\mathbf{AR}}/_{\mathbf{A}}{}^{S} = 0 \,. \end{cases}$$

Le (28) sono le equazioni del campo elettromagnetico neutro, nel vuoto, in forma spinoriale.

Se $\mathfrak{L}$ è data dalle (26), tenendo conto che:

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{\mathbf{RS}}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_{\mathbf{RS}}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{\mathbf{RS}}}\right) \\ \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \overline{\chi}_{\mathbf{SR}}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_{\mathbf{RS}}} - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{\mathbf{RS}}}\right) \end{cases}$$

le equazioni (21′) diventano:

$$(27') \qquad \begin{cases} \Phi^{AS}/^{\mathbf{R}}{}_{A} + \Phi^{\mathbf{AR}}/_{\mathbf{A}}{}^{S} = -\dfrac{1}{2}\, j^{\cdot\mathbf{RS}} \\ \Phi^{AS}/^{\mathbf{R}}{}_{A} - \Phi^{\mathbf{AR}}/_{\mathbf{A}}{}^{S} = 0 \end{cases}$$

e quindi:

$$(28') \qquad \begin{cases} \Phi^{AS}/^{\mathbf{R}}{}_{A} = -\dfrac{1}{4}\, j^{\cdot\mathbf{RS}} \\ \Phi^{\mathbf{AR}}/_{\mathbf{A}}{}^{S} = -\dfrac{1}{4}\, j^{\cdot\mathbf{RS}} \,. \end{cases}$$

Le (28′), che generalizzano le (28), sono le equazioni del campo elettromagnetico non neutro nel vuoto, in forma spinoriale. Le condizioni (23′), poi, esprimono il principio di conservazione dell'elettricità; la prima diventa, infatti: $j^{\cdot\mathbf{RS}}/_{\mathbf{RS}} = 0$, mentre la seconda è identicamente verificata.

La seconda delle (27) e (27′) si identifica con la (14) ed assicura pertanto la dipendenza dello spinore elettromagnetico Φ_{AB} dal solo potenziale spinore hermitiano $\varphi_{\mathbf{RS}}$, secondo la:

$$(30) \qquad \Phi_{AB} = \frac{1}{8}\left(\varphi_{\mathbf{C}B}/^{\mathbf{C}}{}_{\mathbf{A}} + \varphi_{\mathbf{C}A}/^{\mathbf{C}}{}_{B}\right)$$

ottenuta ponendo $\psi_{\mathbf{RS}} = 0$ nella (10).

Introducendo l'unico potenziale $\varphi_{\mathbf{RS}}$ nella prima delle (27) e (27′) ed imponendogli la condizione di solenoidalità, si ottengono le equazioni delle onde rispettivamente per campo neutro oppure no.

Si ha difatti per la (13), ponendo $\psi_{RS} = 0$:

$$\Phi^{AS}/^{R}{}_{A} + \Phi^{AR}/_{A}{}^{S} = \frac{1}{4}(\varphi_{C}{}^{A}/^{CSR}{}_{A} + \varphi^{A}{}_{C}/^{RC}{}_{A}{}^{S}) =$$

$$= \frac{1}{4}(\varphi_{C}{}^{A}/^{CSR}{}_{A} + \varphi_{A}{}^{C}/^{ASR}{}_{C}) = \frac{1}{2}\varphi_{C}{}^{A}/^{CSR}{}_{A}$$

e, per le identità:

$$\varphi_{C}{}^{A}/^{CSR}{}_{A} + \varphi_{C}{}^{S}/^{C}{}_{A}{}^{RA} + \varphi_{CA}/^{CARS} = 0$$

$$\varphi_{C}{}^{S}/^{C}{}_{A}{}^{RA} + \varphi^{CS}/^{R}{}_{AC}{}^{A} + \varphi^{RS}/_{CA}{}^{CA} = 0$$

si deduce:

$$\Phi^{AS}/^{R}{}_{A} + \Phi^{AR}/_{A}{}^{S} = \frac{1}{4}\varphi^{RS}/_{CA}{}^{CA} = \frac{1}{2}\Box\varphi^{RS}. \tag{31}$$

Le prime delle (27) e (27′) diventano quindi:

$$\Box\varphi^{RS} = 0 \qquad \text{e} \qquad (32')\quad \Box\varphi^{RS} = -j^{RS}. \tag{32}$$

Osserviamo che alcuni autori scrivono le equazioni spinoriali del campo elettromagnetico nel vuoto in altra forma [10]:

$$\begin{cases} G^{AS}/^{R}{}_{A} = -\frac{1}{2}j^{RS} \\ G_{AB} = \frac{1}{4}(\varphi_{RA}/^{R}{}_{B} + \varphi_{RB}/^{R}{}_{A}) \end{cases} \tag{33}$$

valendosi dello spinore potenziale φ_{RS} e dello spinore doppio simmetrico G_{AB} corrispondente, secondo le:

$$G_{AB} = \frac{1}{8}S_{\alpha\beta AB}\,G^{\alpha\beta} \qquad \text{e} \qquad (34')\quad G_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}{}^{AB}G_{AB}, \tag{34}$$

al tensore doppio emisimmetrico autoduale $G_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + \check{F}_{\alpha\beta}$ (essendo $\check{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}$ il tensore duale di $F_{\alpha\beta}$) [11].

Le equazioni (33) sono equivalenti alle (27′) o (28′).

Infatti, ricordando la (34′) e la (5) ed osservando che [12]:

$$\check{F}_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}{}^{AB}\,\Phi_{AB} - \overline{S}_{\alpha\beta}{}^{AB}\,\overline{\Phi}_{AB} \tag{35}$$

si deduce:

$$G_{AB} = 2\,\Phi_{AB}. \tag{36}$$

Per la (36), le equazioni (33) si riducono alla prima delle (28′) ed alla (30), a sua volta integrale della seconda delle (27′).

(10) Cfr. ad esempio E. M. CORSON, loco citato ed A. H. TAUB, « Annals of mathematics » [II], *40*, 937 (1939).

(11) Il tensore $G_{\alpha\beta}$ permette di riassumere le equazioni di Maxwell in forma tensoriale nell'unica: $G_{\alpha\beta}/^{\beta} = j_{\alpha}$.

(12) Cfr. E. M. CORSON, loco citato.

4. DEDUZIONE VARIAZIONALE DELLE EQUAZIONI DI DIRAC PER PARTICELLE DI SPIN 1. – Le equazioni di Dirac per una particella libera di spin 1 contengono uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB}, uno spinore γ_{RS} ed i rispettivi coniugati.

Per γ_{RS} hermitiano, tali equazioni sono [13]:

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} K\Phi_{AS} &= \gamma_{RS}/^{R}{}_{A} \\ -K\Phi_{AS} &= \gamma_{S}{}^{R}/_{AR} \\ K\gamma_{RS} &= \Phi_{AR}/^{A}{}_{S} \\ -K\gamma_{SR} &= \Phi^{A}{}_{R}/_{SA} \end{aligned}\right.$$

(dove la costante K vale $(2\pi mc)/h$, essendo m la massa della particella, c la velocità della luce nel vuoto, h la costante di Planck).

Mostriamo come esse possano ottenersi, grazie alla estensione spinoriale (10) del teorema di Clebsch, dal principio variazionale (17).

Considerato lo spinore doppio Φ_{AB} e detto χ_{RS} il suo spinore potenziale, assumiamo come densità lagrangiana (24) la:

$$(38)\qquad \mathfrak{L} = 2\,(\Phi_{AB}\,\Phi^{AB} + \overline{\Phi}_{AB}\,\overline{\Phi}^{AB}) - \frac{K^2}{4}\varphi_{RS}\,\varphi^{RS}$$

(dove φ_{RS} è la parte hermitiana di χ_{RS}) [14].

Le equazioni (21), ricordando le (29), diventano allora:

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Phi^{AS}/^{R}{}_{A} + \Phi^{AR}/_{A}{}^{S} = -\frac{1}{2}K^2\,\varphi^{RS} \\ &\Phi^{AS}/^{R}{}_{A} - \Phi^{AR}/_{A}{}^{S} = 0 \end{aligned}\right.$$

e quindi:

$$(39')\qquad \left\{\begin{aligned} &\Phi^{AS}/^{R}{}_{A} = -\frac{1}{4}K^2\,\varphi^{RS} \\ &\Phi^{AR}/_{A}{}^{S} = -\frac{1}{4}K^2\,\varphi^{RS} \end{aligned}\right.$$

mentre le condizioni (23′) si riducono a:

$$(40)\qquad \varphi_{RS}/^{RS} = 0\,.$$

(13) Cfr. E. M. CORSON, loco citato; A. H. TAUB, loco citato ed A. H. TAUB, « Phys. Rev. », 56, 799 (1939).

(14) Se come lagrangiana, anziché la (38), assumiamo la:

$$\mathfrak{L} = 2\,(\Phi_{AB}\,\Phi^{AB} + \overline{\Phi}_{AB}\,\overline{\Phi}^{AB}) - \frac{K^2}{8}(\chi_{RS}\,\chi^{RS} + \overline{\chi}_{RS}\,\overline{\chi}^{RS})$$

formata con l'intero potenziale χ_{RS}, possiamo dedurre le equazioni di Dirac per $\gamma_{RS} = \frac{K}{4}\chi_{RS}$ non hermitiano. Noi ci occupiamo del caso γ_{RS} hermitiano che porta ad equazioni invarianti rispetto a trasformazioni lineari spinoriali corrispondenti a trasformazioni di Lorentz, sia proprie che improprie. Cfr. A. H. TAUB, loco secondo citato.

La seconda delle (39), identica alla (14), assicura che lo spinore Φ_{AB} dipende dal solo potenziale hermitiano φ_{RS}. Inoltre le condizioni (40) impongono che tale potenziale sia solenoidale. La dipendenza di Φ_{AB} dal potenziale φ_{RS} sarà quindi espressa dalla (13) ove si ponga $\psi_{RS} = 0$, cioè da:

$$\Phi_{AS} = \frac{1}{4}\,\varphi_{RS}/^{R}{}_{A} \tag{41}$$

e, ovviamente, sarà pure:

$$\Phi_{AS} = \frac{1}{4}\,\varphi_{SR}/_{A}{}^{R}\,. \tag{41'}$$

Basta porre $\varphi_{RS} = \frac{4}{K}\,\gamma_{RS}$ perché le (39'), (41) e (41') coincidano con le equazioni (37) di Dirac.

Delle quattro equazioni spinoriali di Dirac, due (le (39'), fra loro coniugate) si traggono direttamente dal principio variazionale (17), mentre le altre due (la (41) e la coniugata (41')) si ottengono come conseguenza delle prime e della condizione di solenoidalità (40).

Ricordiamo infine l'espressione della lagrangiana da cui si traggono le equazioni di Proca in forma tensoriale [15]:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{4}\,F_{\alpha\beta}\,F^{\alpha\beta} - \frac{K^2}{2}\,\varphi_\alpha\,\varphi^\alpha\,. \tag{42}$$

Osserviamo che, nel caso in cui il tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$ che caratterizza il campo di Proca ed il potenziale φ^α sono reali, la (38) è la corrispondente spinoriale della (42). Ciò è conforme al risultato che le equazioni di Proca, nel caso di potenziale reale, coincidono con quelle di Dirac per particelle di spin 1 [16].

(15) Cfr. B. FINZI, loco citato.
(16) Cfr. A. H. TAUB, loco primo e secondo citato.