Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Contributi alla teoria matematica delle volte

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.5, p. 819–827.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_819_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Meccanica. — *Contributi alla teoria matematica delle volte.* Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — A simple derivation of the vectorial equilibrium equations of a shell is given, and the expression of internal virtual work, according to Kirchhoff assumptions only.

Exact relations (without approximation or assumption on the thickness of the shell) are also established between the global stress measures of a shell (active and constrained) and the stress components, suitably defined.

La teoria delle volte, a differenza di quella delle piastre, non sembra aver ancora trovato una sistemazione universalmente accettata (cfr. le diverse formulazioni di [3] [4] [5] [6] [8] [9] [11] [12]). Ciò, e già nella teoria linearizzata, sia per quanto riguarda la scelta delle caratteristiche di deformazione e delle equazioni di equilibrio, sia per la scelta, più difficile, del potenziale elastico.

Lungi dal presentare qui una nuova teoria, si cerca di portare qualche contributo alla problematica delle volte: *a*) inquadrandola nella teoria tridimensionale; *b*) usando, per la superficie mediana, coordinate generali in luogo di coordinate di curvatura; *c*) facendo ricorso alla sola ipotesi di Kirchhoff sulle normali; *d*) senza presupporre piccole deformazioni.

In questa prima Nota si ricavano le sei equazioni di equilibrio nelle *dieci* caratteristiche globali dello stress–attivo e vincolare (1) –, nonché il lavoro virtuale delle forze intime. È proprio quest'ultimo che suggerisce, come per altro rilevato da Budiansky e Sanders [1], una scelta ragionevole, e per le sei caratteristiche di deformazione, e per le *sei* variabili di stress essenziali. Tale scelta è confortata dalla circostanza che dalle equazioni di equilibrio se ne possono ricavare tre che contengono, oltre alle componenti di spostamento, solo le anzidette variabili di stress; sì che, precisati i *sei* legami stress–strain, il problema è determinato senza altri ricorsi.

Con questo primo studio, che lascia uno spiraglio per una teoria delle deformazioni finite, mi propongo per altro di ottenere una espressione *invariantiva* del potenziale elastico di una volta; carattere non posseduto da quello del Love [7], come recentemente da me osservato [2].

§ 1. – COORDINAMENTO DI ALCUNE NOZIONI SUI CONTINUI (cfr. [10] [13]).

Siano: $\mathcal{T} \equiv O\, \boldsymbol{c}_1\, \boldsymbol{c}_2\, \boldsymbol{c}_3$ una prefissata terna cartesiana di riferimento; C la configurazione attuale di un generico sistema continuo tridimensionale; (x^α), $(\alpha = 1, 2, 3)$ coordinate *lagrangiane* per il punto generico P di C;

(*) Nella seduta del 16 aprile 1966.

(1) Corrispondente alla ipotesi di Kirchhoff.

$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathrm{OP} \left(\partial_\alpha \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$ i vettori della base in P ; $g_{\alpha\beta} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\beta$ i coefficienti della metrica, $g = \det \| g_{\alpha\beta} \|$; $\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = g^{\alpha\beta}\, \boldsymbol{\varepsilon}_\beta$ i vettori della cobase; β l'omografia di tensione, cioè $\mathrm{X}_{\alpha\beta} = \beta\, \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\beta$ le *ordinarie* caratteristiche dello stress. Infine $\mathbf{F}$ la forza perduta per unità di massa; k la densità; $\mathbf{Y}$ la forza superficiale esterna.

Introdotti i vettori [2]

$$\mathbf{Y}^\alpha \equiv \beta \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = \mathrm{Y}^{\alpha\beta}\, \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{1}$$

(vettori caratteristici degli sforzi in P), le equazioni di *Cauchy* assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} k\mathbf{F} - \dfrac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_\alpha (\sqrt{g}\, \mathbf{Y}^\alpha) = 0 \cdots \mathrm{C} \\ \mathbf{Y} - \mathrm{N}_\alpha\, \mathbf{Y}^\alpha = 0 \cdots \mathfrak{F}\mathrm{C}\,, \end{cases} \tag{2}$$

essendo $\mathbf{N} \equiv \mathrm{N}_\alpha\, \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha$ il versore della normale interna a $\mathfrak{F}\mathrm{C}$.

Sia ora $\partial \mathrm{P}$ uno spostamento *nominale* a partire da C. Le (2) sono equivalenti all'unica relazione scalare

$$\int_{\mathrm{C}} \left[k\mathbf{F} - \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_\alpha (\sqrt{g}\, \mathbf{Y}^\alpha)\right] \cdot \partial \mathrm{P}\, d\mathrm{C} + \int_{\mathfrak{F}\mathrm{C}} (\mathbf{Y} - \mathrm{N}_\alpha\, \mathbf{Y}^\alpha) \cdot \partial \mathrm{P}\, d\, \mathfrak{F}\mathrm{C} = 0\,, \tag{3}$$

purché questa sia intesa valida per *ogni* scelta di $\partial \mathrm{P}$. D'altra parte è $\partial_\alpha (\sqrt{g}\, \mathbf{Y}^\alpha) \cdot \partial \mathrm{P} = \partial_\alpha (\sqrt{g}\, \mathbf{Y}^\alpha \cdot \partial \mathrm{P}) - \sqrt{g}\, \mathbf{Y}^\alpha \cdot \partial_\alpha (\partial \mathrm{P})$, in modo che applicando il teorema della divergenza [3], la (3) dà luogo alla seguente *relazione simbolica*:

$$\int_{\mathrm{C}} k\mathbf{F} \cdot \partial \mathrm{P}\, d\mathrm{C} + \int_{\mathfrak{F}\mathrm{C}} \mathbf{Y} \cdot \partial \mathrm{P}\, d\mathrm{C} + \int_{\mathrm{C}} \mathbf{Y}^\alpha \cdot \partial_\alpha (\partial \mathrm{P})\, d\mathrm{C} = 0\,. \tag{4}$$

L'ultimo integrale fornisce ovviamente una espressione del lavoro nominale delle forze intime che, tenuto conto della uguaglianza $\partial_\alpha (\partial \mathrm{P}) = \partial (\partial_\alpha \mathrm{OP}) = \partial \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$, si scrive, *indipendentemente dalle relazioni di simmetria*,

$$\partial \mathfrak{L}^{(\mathrm{in.})} = \int_{\mathrm{C}} \mathbf{Y}^\alpha \cdot \partial \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\, d\mathrm{C}\,. \tag{5}$$

Se infine si tien conto delle relazioni di simmetria

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \wedge \mathbf{Y}^\alpha = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Y}^{\alpha\beta} = \mathrm{Y}^{\beta\alpha} \cdots \mathrm{C}\,, \tag{6}$$

la (5) diviene:

$$\partial \mathfrak{L}^{(\mathrm{in.})} = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{C}} \mathrm{Y}^{\alpha\beta}\, \partial g_{\alpha\beta}\, d\mathrm{C}\,. \tag{7}$$

(2) Se le x^α, come è sempre possibile, si interpretano come coordinate *cartesiane* di punto P_* in una configurazione di riferimento C_*, le $g_{\alpha\beta}$ danno le caratteristiche di deformazione relative allo spostamento $\mathrm{C}_* \to \mathrm{C}$ e i prodotti $\mathrm{Y}^{\alpha\beta} \equiv \mathbf{Y}^\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^\beta$ differiscono solo per il fattore $\sqrt{g}$ dalle cosidette caratteristiche lagrangiane di tensione.

(3) Si noti che le quantità $\mathbf{Y}^\alpha \cdot \partial \mathrm{P}$, in un cambiamento di coordinate $x^\alpha \longleftrightarrow x^{\alpha'}$ si trasformano come le componenti di un vettore controvariante.

§ 2. – TEORIA MATEMATICA DELLE VOLTE.

1. *Premesse.* – Il sistema continuo tridimensionale si presenti in C come una volta di superficie mediana Σ e spessore costante $2h$. Siano poi (x^i) $(i=1,2)$ coordinate molecolari, *non* necessariamente di curvatura per Σ, dei punti Q di Σ; $\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2)$ i vettori della base naturale in Q, A_{ik} e B_{ik} i coefficienti della prima e seconda forma quadratica di Σ (4):

$$\boldsymbol{e}_i = \partial_i OQ \quad , \quad A_{ik} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k \quad , \quad \partial_i \boldsymbol{n} = B_i^k \boldsymbol{e}_k \tag{8}$$

($\boldsymbol{n}$ versore della normale a Σ in Q).

Per il punto generico di C si ha

$$OP = OQ(x) + z\boldsymbol{n}(x), \tag{9}$$

essendo Q la proiezione ortogonale di P su Σ e z l'ascissa sulla normale $\boldsymbol{n}$. Di qui segue, per derivazione,

$$\varepsilon_i = \boldsymbol{e}_i + zB_i^k \boldsymbol{e}_k \quad , \quad \varepsilon_3 = \boldsymbol{n} \qquad (i = 1, 2), \tag{10}$$

nonché

$$g_{ik} = A_{ik} + 2zB_{ik} + z^2 B_{ir} B_k^r \quad , \quad g_{i3} = 0 \quad , \quad g_{33} = 1 ; \tag{11}$$

ove i prodotti $B_{ir} B_k^r$, coefficienti della *terza* forma quadratica di Σ, si possono esprimere con la formula

$$B_{ir} B_k^r = \mathcal{H} B_{ik} - \mathcal{K} A_{ik}, \tag{12}$$

essendo

$$\mathcal{H} = B_i^i \equiv A^{ik} B_{ik} \quad , \quad \mathcal{K} = \det \| B_i^k \| \equiv \frac{B}{A} \tag{13}$$

le curvature media e totale di Σ.

Insieme è $\sqrt{g} = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \cdot \boldsymbol{n}$, $\sqrt{A} = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{n}$, quindi

$$\sqrt{g} = \mathfrak{D} \sqrt{A} \qquad \text{con} \quad \mathfrak{D}(z) = 1 + \mathcal{H}z + \mathcal{K}z^2. \tag{14}$$

Conviene introdurre anche i vettori

$$\varepsilon^i = g^{ik} \varepsilon_k \quad , \quad \boldsymbol{e}^i = A^{ik} \boldsymbol{e}_k \quad , \quad \varepsilon^3 = \boldsymbol{e}^3 = \boldsymbol{n}, \tag{15}$$

osservando che sussistono le identità

$$\varepsilon^\alpha \cdot \varepsilon_\beta = \boldsymbol{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta , \tag{16}$$

(4) Con a_{ik} e b_{ik} si indicheranno gli analoghi in una configurazione di riferimento; sì che le differenze $\dfrac{A_{ik} - a_{ik}}{2}$, $B_{ik} - b_{ik}$ saranno caratteristiche di deformazione per la volta. Per i legami tra queste e quelle ordinarie del Love si confronti [2], Nota II p. 467.

nonché

$$e_\alpha \wedge e_{\alpha+1} = \sqrt{A}\, e^{\alpha+2} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{17}$$

come si riconosce moltiplicando primo e secondo membro scalarmente per $e_{\alpha+2}$.

I vettori ε^i possono naturalmente calcolarsi ricavando dalla (11) i reciproci g^{ik}, ma si può anche osservare che essi saranno del tipo $\varepsilon^1 = \lambda \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3$, $\varepsilon^2 = \mu \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1$. Di qui, tenuto conto della (10) e della (17), nonché delle condizioni $\varepsilon^1 \cdot \varepsilon_1 = 1 = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_2$, si ricava in definitiva

$$\mathfrak{D} \varepsilon^i = (1 + z\mathcal{H})\, e^i - z B_k^i\, e^k \qquad (i = 1, 2). \tag{18}$$

Si noti esplicitamente, nelle grandezze introdotte, il carattere tensoriale degli indici per trasformazioni di coordinate adattate a Σ, quindi del tipo $x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2)$, $z' = z$; carattere che nel seguito sarà sempre sottinteso.

2. *Equazioni di equilibrio.* – Dopo le premesse fatte, riprendiamo la relazione simbolica (4) ammettendo, per semplicità, che le forze superficiali esterne agiscano solo sul contorno laterale σ della volta [5] e possano pertanto ripartirsi sul bordo l di Σ.

Consideriamo dapprima uno spostamento nominale del tipo $\partial P = \partial Q$, indipendente cioè da z. Si ha allora la seguente condizione scalare, da intendersi valida per ogni ∂Q:

$$\int_\Sigma \mu \boldsymbol{f} \cdot \partial Q \, d\Sigma + \int_l \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial Q \, dl + \int_C \mathbf{Y}^i \cdot \partial_i (\partial Q)\, dC = 0 \qquad (dC = \mathfrak{D}\, dz\, d\Sigma) \tag{19}$$

ove si è posto

$$\mu \boldsymbol{f} = \int_{-h}^{h} k\mathbf{F}\, \mathfrak{D}\, dz \quad , \quad \boldsymbol{\varphi} = \int_{-h}^{h} \mathbf{Y} \chi\, dz \qquad (d\sigma = \chi\, dl\, dz), \tag{20}$$

e insieme, come dalla (18),

$$\boxed{\mathfrak{D} \mathbf{Y}^i = (1 + z\mathcal{H})\, \beta e^i - z B_k^i\, \beta e^k} \qquad (i = 1, 2). \tag{21}$$

Introdotti i valori medi

$$\mathbf{R}^i = \int_{-h}^{h} \mathfrak{D} \mathbf{Y}^i\, dz, \tag{22}$$

(5) Eventuali forze agenti sulle superfici Σ^- e Σ^+, parallele a Σ, che limitano la volta, ad esempio delle pressioni, possono del resto pensarsi ripartite su Σ.

l'ultimo integrale della (19) si scrive, anche col concorso del teorema della divergenza,

$$\int_\Sigma \mathbf{R}^i \cdot \partial_i (\partial Q)\, d\Sigma = \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{A}} \partial_i (\sqrt{A}\, \mathbf{R}^i \cdot \partial Q)\, d\Sigma - \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{A}} \partial_i (\sqrt{A}\, \mathbf{R}^i) \cdot \partial Q\, d\Sigma =$$

$$= -\int_l \nu_i \mathbf{R}^i \cdot \partial Q\, dl - \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{A}} \partial_i (\sqrt{A}\, \mathbf{R}^i) \cdot \partial Q\, d\Sigma ,$$

essendo $\boldsymbol{\nu} = \nu_i \boldsymbol{e}^i$ il versore della normale interna ad l su Σ. La (19) dà così luogo, stante l'arbitrarietà di ∂Q, al seguente gruppo di equazioni:

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu \boldsymbol{f} - \frac{1}{\sqrt{A}} \partial_i (\sqrt{A}\, \mathbf{R}^i) = 0 \cdots \Sigma \\ &\boldsymbol{\varphi} - \nu_i \mathbf{R}^i = 0 \cdots l . \end{aligned} \right.$$

Consideriamo ora uno spostamento nominale del tipo $\partial P = \partial\omega \wedge z\boldsymbol{n}$, con $\partial\omega$ indipendente da z, arbitrario (6). Introducendo, come già fatto nella (19), con una integrazione rispetto a z, i momenti caratteristici delle forze esterne rispetto a Q:

$$(24) \qquad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \wedge \int_{-h}^{h} zk\, \mathbf{F}\mathfrak{D}\, dz \quad , \quad \boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{n} \wedge \int_{-h}^{h} z\mathbf{Y}\, \chi dz ,$$

nonché

$$(25) \qquad \mathbf{M}^i = \boldsymbol{n} \wedge \int_{-h}^{h} z\mathfrak{D}\, \mathbf{Y}^i\, dz ,$$

si ottiene la seguente condizione scalare, valida per ogni scelta del vettore $\partial\omega$:

$$(26) \qquad \int_\Sigma \boldsymbol{m} \cdot \partial\omega\, d\Sigma + \int_l \boldsymbol{\vartheta} \cdot \partial\omega\, dl + \int_\Sigma \mathbf{M}^i \cdot \partial_i (\partial\omega)\, d\Sigma +$$

$$+ \int_C (z\partial_i \boldsymbol{n} \wedge \mathbf{Y}^i + \boldsymbol{n} \wedge \mathbf{Y}^3) \cdot \partial\omega\, dC = 0 .$$

D'altra parte la proprietà di simmetria delle caratteristiche degli sforzi, $\varepsilon_\alpha \wedge \mathbf{Y}^\alpha = 0$ si traduce, come dalla (10), nella condizione

$$(27) \qquad (\boldsymbol{e}_i + z\partial_i \boldsymbol{n}) \wedge \mathbf{Y}^i + \boldsymbol{n} \wedge \mathbf{Y}^3 = 0 ,$$

sì che l'ultimo integrale della (26) non differisce da $-\int_C \boldsymbol{e}_i \wedge \mathbf{Y}^i \cdot \partial\omega\, dC = -\int_\Sigma \boldsymbol{e}_i \wedge \mathbf{R}^i \cdot \partial\omega\, d\Sigma$. Trasformando poi, come già fatto in precedenza, il

(6) Basterebbe normale ad $\boldsymbol{n}$.

penultimo integrale, si ottiene in definitiva, stante l'arbitrarietà del vettore $\partial\omega$, il secondo gruppo di equazioni:

$$(28)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{m} - \boldsymbol{e}_i \wedge \mathbf{R}^i - \dfrac{1}{\sqrt{A}}\,\partial_i(\sqrt{A}\,\mathbf{M}^i) = 0 \cdots \Sigma \\ \vartheta - \nu_i\,\mathbf{M}^i = 0 \cdots l. \end{cases}$$

Si ottengono così, prescindendo dalle condizioni al contorno, le seguenti equazioni indefinite:

$$(29)\qquad \mu \boldsymbol{f} - \frac{1}{\sqrt{A}}\,\partial_i(\sqrt{A}\,\mathbf{R}^i) = 0 \quad , \quad \boldsymbol{m} - \boldsymbol{e}_i \wedge \mathbf{R}^i - \frac{1}{\sqrt{A}}\,\partial_i(\sqrt{A}\,\mathbf{M}^i) = 0 .$$

A queste va naturalmente aggiunta l'equazione di continuità. Complessivamente si hanno sette equazioni scalari in 14 incognite: la densità μ, le tre componenti di spostamento a partire da una configurazione di riferimento e le *dieci* componenti dei vettori $\mathbf{R}^i$ ed $\mathbf{M}^i$, questi ultimi ortogonali ad $\boldsymbol{n}$. Tenuto conto che per una volta le caratteristiche di deformazione sono sei, si aggiungeranno, per trasformazioni reversibili, sei legami stress–strain. Prescindendo da μ, pareggiata dalla equazione di continuità, le sei equazioni (29) faranno allora intervenire 4 incognite per lo stress *reattivo* e tre incognite per lo spostamento. Mancherebbe pertanto una equazione: ma prima di pensare ad altri legami conviene esplicitare il lavoro delle forze intime.

3. *Lavoro virtuale delle forze intime.* – Per una volta la (5) fornisce la seguente espressione del lavoro virtuale delle forze intime:

$$(30)\qquad \delta\mathfrak{L}^{(\mathrm{in.})} = \int_C \mathbf{Y}^i \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}_i\, dC + \int_C \mathbf{Y}^3 \cdot \delta\boldsymbol{n}\, dC$$

ove, concordemente alla (10), *posto che* $\delta z = 0$, subordinatamente alla ipotesi di Kirchhoff, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_i = \delta\boldsymbol{e}_i + z\,(\delta B_{ik}\,\boldsymbol{e}^k + B_{ik}\,\delta\boldsymbol{e}^k)$. D'altra parte, ponendo

$$(31)\qquad \mathbf{Y}^i = Y^{ik}\,\boldsymbol{e}_k + Y^i\,\boldsymbol{n},$$

la (27) si spezza nelle due equazioni

$$(27')\qquad \boldsymbol{e}_i \wedge (Y^{ik} - zB_r^{\ k}\,Y^{ri})\,\boldsymbol{e}_k = 0 \quad , \quad \mathbf{Y}^3 = Y^i\,(\boldsymbol{e}_i + zB_{ik}\,\boldsymbol{e}^k) + Y\boldsymbol{n};$$

sì che $\mathbf{Y}^3 \cdot \delta\boldsymbol{n} = Y^i\,(\boldsymbol{e}_i + zB_{ik}\,\boldsymbol{e}^k)\cdot\delta\boldsymbol{n} = -Y^i\,\boldsymbol{n}\cdot(\delta\boldsymbol{e}_i + zB_{ik}\,\delta\boldsymbol{e}^k)$ e la (30) si scrive successivamente così [7]

$$\delta\mathfrak{L}^{(\mathrm{in.})} = \int_C [Y^{ir}\,\boldsymbol{e}_r\cdot(\delta\boldsymbol{e}_i + zB_{ik}\,\delta\boldsymbol{e}^k) + zY^{ik}\,\delta B_{ik}]\, dC =$$

$$= \int_C [(Y^{ir} - zY^{ki}\,B_k^{\ r})\,\boldsymbol{e}_r\cdot\delta\boldsymbol{e}_i + zY^{ik}\,\delta B_{ik}]\, dC .$$

(7) Si tien conto dell'identità $\boldsymbol{e}_r\cdot\delta\boldsymbol{e}^k = -\boldsymbol{e}^k\cdot\delta\boldsymbol{e}_r$, come dalla (16).

Di qui, tenuto conto della *simmetria* del tensore $Y^{ir} - zY^{ki} B_k{}^r$, come dalla $(27')_1$, ovvero dalla identità [cfr. (21) e (12)]

$$(32\,a) \qquad \mathfrak{D}(Y^{ik} - zY^{ri} B_r{}^k) \equiv (1 + \mathcal{H}z - \mathcal{K}z^2)\,\sigma^{ik} - z\,(B_r{}^i \sigma^{rk} + B_r{}^k \sigma^{ri})$$

$$(\sigma^{ik} \equiv \beta e^i \cdot e^k = \sigma^{ki}),$$

segue in definitiva

$$(33) \qquad \delta\mathfrak{L}^{(\text{in.})} = \int_\Sigma \left(\frac{1}{2} N^{ik}\,\delta A_{ik} + M^{ik}\,\delta B_{ik}\right) d\Sigma,$$

ove si è posto

$$(32\,b) \qquad N^{ik} = \int_{-h}^{h} \mathfrak{D}(Y^{ik} - zY^{ri} B_r{}^k)\,dz \quad , \quad M^{ik} = \int_{-h}^{h} z\mathfrak{D}\, Y^{ik}\,dz.$$

Si noti che, a differenza di N^{ik} e B_{ik}, il tensore M^{ik} non è simmetrico (8), anche se nella (33) interviene *soltanto* la sua parte simmetrica:

$$(34) \qquad M^{(ik)} \equiv \frac{1}{2}(M^{ik} + M^{ki}).$$

4. *Eliminazione delle incognite sovrabbondanti nelle* (29). – La (33) suggerisce di assumere, per una volta, come variabili di stress i due tensori *simmetrici* N^{ik} ed $M^{(ik)}$: è tale assunzione legittima?

Per riconoscerlo si traducano le (29) in forma scalare ponendo

$$(35) \qquad \boldsymbol{f} = f^i \boldsymbol{e}_i + f\boldsymbol{n} \quad , \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \wedge m^i \boldsymbol{e}_i$$

nonché, concordemente alle (22)–(25),

$$(36) \qquad \mathbf{R}^i = R^{ik} \boldsymbol{e}_k + R^i \boldsymbol{n} \quad , \quad \mathbf{M}^i = \boldsymbol{n} \wedge M^{ik} \boldsymbol{e}_k,$$

essendo

$$(37) \qquad R^{ik} = \int_{-h}^{h} \mathfrak{D} Y^{ik}\,dz \quad , \quad R^i = \int_{-h}^{h} \mathfrak{D} Y^i\,dz.$$

Tenuto conto delle note identità $\partial_i \boldsymbol{e}_k = \left\{ {r \atop ik} \right\} \boldsymbol{e}_r - B_{ik}\,\boldsymbol{n}$, $\frac{1}{\sqrt{A}} \partial_i \sqrt{A} = \left\{ {k \atop ik} \right\}$, oltre alla conferma della simmetria del tensore già introdotto con la $(32\,b)_1$: $N^{ik} \equiv R^{ik} - B_r{}^k M^{ri}$, si ottengono le seguenti equazioni:

$$(38) \qquad \mu f^k - R^{ik}{}_{/i} - R^i B_i{}^k = 0 \quad , \quad \mu f - R^i{}_{/i} + R^{ik} B_{ik} = 0 \quad , \quad R^k = M^{ik}{}_{/i} - m^k$$

essendo / il simbolo di derivata covariante su Σ.

(8) A meno che sia $B_{rk} = 0$ (*piastra*).

Di qui, eliminando il vettore R^i in virtù della terza equazione, si ottiene in definitiva:

$$(39) \qquad \begin{cases} \mu f^k + m^i B_i^k - B_r^k M^{ir}{}_{/i} - R^{ik}{}_{/i} = 0 & (k = 1, 2) \\ \mu f + m^i{}_{/i} - M^{ik}{}_{/ik} + R^{ik} B_{ik} = 0 . \end{cases}$$

È notevole la circostanza che le tre equazioni scalari così dedotte fanno in realtà intervenire, per quanto riguarda lo stress, *soltanto* i due tensori simmetrici N^{ik} ed $M^{(ik)}$, quindi *sei* quantità scalari. Per riconoscerlo basta osservare che si ha:

a) $B_r^k M^{ir}{}_{/i} \equiv B_r^k (M^{ir} + M^{ri})_{/i} - B_r^k M^{ri}{}_{/i} \equiv 2 B_r^k M^{(ir)}{}_{/i} - (B_r^k M^{ri})_{/i} + B_r^k{}_{/i} M^{ri}$ ove, per la simmetria del tensore triplo $B_{rk/i}$ in virtù delle equazioni di *Gauss–Codazzi* (cfr. [3] p. 235), l'ultimo termine non differisce da $B_r^k{}_{/i} M^{(ri)}$;

b) $\Omega^{ik}{}_{/ik} \equiv 0$ per *ogni* tensore antisimmetrico (9);

c) $R^{ik} B_{ik} \equiv N^{ik} B_{ik} + B_r^k B_{ik} M^{ri} \equiv N^{ik} B_{ik} + B_r^k B_{ik} M^{(ri)}$.

Le (39) si scrivono pertanto nella forma

$$(40) \qquad \begin{cases} p^k - N^{ik}{}_{/i} - 2 B_r^k M^{(ir)}{}_{/i} - B_r^k{}_{/i} M^{(ri)} = 0 \\ p + N^{ik} B_{ik} + B_r^k B_{ik} M^{(ri)} - M^{(ik)}{}_{/ik} = 0 , \end{cases}$$

ove si è posto per brevità

$$(41) \qquad p^k = \mu f^k + B_i^k m^i \quad , \quad p = \mu f + m^i{}_{/i} .$$

Per una piastra si ha $p^k \equiv \mu f^k = N^{ik}{}_{/i}$, $\mu f = - m^i{}_{/i} + M^{ik}{}_{/ik}$ ecc.

Si noti, terminando questo primo approccio sulle volte, che per *tutte* le grandezze introdotte [cfr. ad esempio (21), (22), (25)] sono per altro ancora disponibili eventuali sviluppi in serie di z.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

[1] BUDIANSKY B. e SANDERS J. L., *On the best first-order linear shell theory*, « Progress in Applied Mechanics », The Macmillan Company, New York (1962), p. 129.

[2] FERRARESE G., *Sulle deformazioni finite di una volta*, Note I, II e III in « Rend. Acc. Lincei », fasc. 3, 4 e 6, vol. XXXVI (1964).

[3] FINZI B. e PASTORI M., *Calcolo tensoriale e applicazioni*, 2ª ed. Zanichelli, Bologna (1961), Cap. IX, § 11.

[4] FLÜGGE W., *Stresses in Shells*, Cp. 2, Springer–Verlag, Berlin, Göttinger, Heidelberg (1960).

[5] GOLDENVEIZER A. L., *Theory of Elastic thin shells*, Herrmann, Pergamon Press (1961).

(9) Come risulta dalla formula di commutazione di *Ricci* o anche osservando che per un vettore o tensore antisimmetrico si ha $\Omega^{ik}{}_{/i} \equiv \frac{1}{\sqrt{A}} \partial_i (\sqrt{A}\, \Omega^{ik})$, quindi

$$\Omega^{ik}{}_{/ik} \equiv \frac{\partial_k}{\sqrt{A}} (\sqrt{A}\, \Omega^{ik}{}_{/i}) \equiv \frac{1}{\sqrt{A}} \partial_k \partial_i (\sqrt{A}\, \Omega^{ik}) = 0 .$$

[6] KOITER W. T., *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, « Proceedings of the Symposium in the Theory of thin elastic shells, Delft, 1959 », Koiter, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1960);
— *A Systematic Simplification of the General Equations in the Linear Theory of Thin Shells*, « Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Amsterdam », *B 64*, 612–19 (1961).

[7] LOVE A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, IV ed., The University Press–Cambridge (1952), p. 530.

[8] LURIE A. I., *On the Static Geometry Analogue of Shell Theory*, Problems of Continuum Mechanics, SIAM, Philadelphia (1961).

[9] NOVOZHILOV V. V., *The Theory of Thin Shells*, P. Noordhoff, Groningen (1959).

[10] SIGNORINI A., *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memorie I, II e III in « Annali Matem. Pura e Appl. », XXII (1943), XXX (1949), XXXIX (1955).

[11] SYNGE J. L. e CHIEN W. Z., *The intrinsic theory of elastic shells and plates*, Applied Mechanics, T. V. Kármán Anniversary Volume, 103–120 (1941).

[12] TIMOSHENKO S. e WOINOWSKY-KRIEGER S., *Theory of Plates and Shells*, 2ª ed. MacGraw-Hill, New York (1959).

[13] TRUESDELL C. e TOUPIN R. A., *The Classical field Theories*, « Handbuch der Physik », III/1, Springer-Verlag, Berlin–Gottingen, Heidelberg (1960).