Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Tallini Scafati

$\{k, n\}$-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.5, p. 812–818.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_812_0>

Geometria. — *$\{k, n\}$–archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri* (*). Nota I di MARIA TALLINI SCAFATI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — The present paper, divided into Notes I and II, deals with $\{k, n\}$–arcs in a finite graphic plane π_q, i.e., with sets of k point of π_q such that $n + 1$ distinct points of the set are never collinear, but there are n distinct points of the set which are collinear. In this Note I we establish some results for arbitrary $\{k, n\}$–arcs, we obtain a lower bound for k (which cannot be improved) in the case of $\{k, n\}$–arcs which are complete (i.e., not contained in a $\{k + 1, n\}$–arc), and we add some properties holding for arcs which only admit m–secant and n–secant lines ($m < n, m \neq 0$).

1. Sia π_q un piano grafico finito irriducibile d'ordine q, [4]. In π_q definiscesi $\{k, n\}$*–arco* ($n \geq 2$) un insieme di k punti, K, di cui sia n il massimo numero di punti allineati, [1], [2]; k dicesi *ordine* ed n *grado* di K. Per $n = 2$, si ottiene così la nozione di k–arco, [4]. Si noti poi che un qualsiasi insieme che contenga i punti di una retta è un $\{k, q + 1\}$–arco, e viceversa; perciò nel seguito supporremo sempre $n \leq q$ ed inoltre, per evitare casi banali, $q > 2$. Un $\{k, n\}$–arco si dirà *completo*, se non è contenuto in nessun $\{k + 1, n\}$–arco; in caso contrario si dirà *incompleto*.

Dato un $\{k, n\}$–arco K, denoteremo con t_s ($s = 0, 1, \cdots, n$) il numero delle s–secanti di K, cioè delle rette che incontrano K esattamente in s punti. Gli interi t_s saranno detti *caratteri* dell'arco. Per essi valgono le relazioni seguenti (cfr. [6], n. 1):

$$\sum_{s=0}^{n} t_s = q^2 + q + 1, \tag{1}$$

$$\sum_{s=2}^{n} s(s-1)\, t_s = k(k-1), \tag{2}$$

$$\sum_{s=1}^{n} s t_s = k(q+1). \tag{3}$$

L'arco K si dirà *ad l caratteri* se per esso sono diversi da zero esattamente l distinti dei caratteri t_s (si noti che deve essere $t_n \neq 0$). Esso si dirà poi di tipo ($m_1, m_2, \cdots, m_{l-1}, n$), con $m_1 < m_2 < \cdots < m_{l-1} < n$, se i suoi caratteri diversi da zero sono soltanto $t_{m_1}, t_{m_2}, \cdots, t_{m_{l-1}}, t_n$. Chiameremo infine *specie* dell'arco K il più piccolo intero $m = m_1$, per cui si abbia $t_m \neq 0$.

Nel presente lavoro ci occupiamo dei $\{k, n\}$–archi, con particolare riguardo a quelli con soltanto due caratteri. Esso è diviso in due Note. Per quanto riguarda la prima, nel n. 2 stabiliamo alcuni risultati validi per un qualsiasi

(*) Il lavoro è stato eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 17 del C.N.R.
(**) Nella seduta del 14 maggio 1966.

$\{k, n\}$-arco di specie m, precisamente proviamo che $m \leq n - 2$ e che, se è $m \neq 0$, risulta $k \leq (n-1)q + m$; dimostriamo inoltre una proprietà di completezza per gli archi di ordine $k = (n-1)q + m$. Nel n. 3 diamo una limitazione inferiore per l'ordine di un $\{k, n\}$-arco completo, determinando inoltre tutti gli archi il cui ordine raggiunge ivi il valore inferiore. Nei numeri che seguono prendiamo in considerazione gli archi a due caratteri di specie $m \neq 0$. Nel n. 4 stabiliamo una limitazione superiore ed una inferiore per l'ordine k di un tale arco. Nel n. 5 mostriamo come, a partire da un arco a due caratteri, se ne possano costruire altri, ancora a due caratteri: il complementare ed i duali, che vengono poi studiati in relazione all'arco dato.

La seconda Nota inizia col n. 6, nel quale si determinano tutti i $\{k, n\}$-archi a due caratteri di specie $m = 1$ e quelli per cui $n = q$ ed inoltre tutti i $\{k, n\}$-archi a due caratteri per cui k assume uno dei valori estremi nella doppia limitazione per k stabilita nel n. 4. Nel n. 7 diamo delle condizioni aritmetiche necessarie per l'esistenza degli archi a due caratteri. Infine nel n. 8, dallo studio di alcuni particolari archi a due caratteri, deduciamo una caratterizzazione grafica delle curve hermitiane.

2. Cominciamo col provare le seguenti proposizioni:

I. – *Se* K *è un* $\{k, n\}$-*arco di* π_q *di specie* m *ed è* $m \neq 0$, *risulta:*

$$k \leq (n-1)q + m. \tag{4}$$

Infatti, se $P \in K$ è un punto di una m-secante, le q rette distinte da essa per P hanno al più $n - 1$ punti in comune con l'arco K, onde la (4).

II. – *Per la specie* m *di un* $\{k, n\}$-*arco,* K, *di* π_q *risulta:*

$$m \leq n - 2. \tag{5}$$

Infatti, se fosse $m = n - 1$, detta r una n-secante di K e Q un suo punto non appartenente a K, denotati con u_{n-1} ed u_n rispettivamente il numero delle $(n-1)$-secanti e delle n-secanti di K per Q, deve essere:

$$\begin{cases} (n-1)\, u_{n-1} + n u_n = k, \\ u_{n-1} + u_n = q + 1, \end{cases}$$

da cui $u_n = k - (n-1)(q+1)$. Essendo $u_n \geq 1$ (perché Q appartiene ad una n-secante), sarà $k \geq (n-1)(q+1) + 1 > (n-1)q + n - 1 = (n-1)q + m$ e ciò contrasta con la (4). Se poi fosse $m = n$, ogni retta per un punto Q esterno a K essendo n-secante, si avrebbe $k = n(q+1)$ e ciò contrasta di nuovo con la (4). È da notare che la limitazione (5) non può venir migliorata in quanto esistono dei $\{k, n\}$-archi di specie $n - 2$, ad esempio il $\{7, 3\}$-arco di $S_{2,4}$ costituito dai punti di un subpiano $S_{2,2}$.

Un $\{k, n\}$-arco K di specie $m \neq 0$ tale che risulti $k = (n-1)q + m$ sarà detto *massimale rispetto alla specie*. Dimostriamo ora che:

III. – *Ogni* $\{k, n\}$-*arco* K *massimale rispetto alla specie* m, *risulta completo se* $t_m \geq 2$. *Se* $t_m = 1$, *esso o è completo, oppure può venir completato aggregando ad esso* $n - m$ *punti al più, scelti sull'unica sua* m-*secante.*

Infatti, se K non è completo, esso è contenuto in un $\{k+1, n\}$-arco K' di specie m', ottenuto aggregando a K un punto P. Dovrà allora essere: $k+1 \leq (n-1)q+m'$ (per la (4) applicata a K') e quindi (essendo $k=(n-1)q+m$) $m' \geq m+1$ ed anzi $m'=m+1$, dato che si è aggregato a K un sol punto. K' non possiede dunque m-secanti. Ne segue che ogni m-secante di K deve passare per P. D'altra parte, per P non può passare più di una m-secante di K, in quanto ogni retta per P ha al più $n-1$ punti in comune con K (perché da P non esce nessuna n-secante a K, essendo P aggregabile a K), onde, se per P passassero due m-secanti, si avrebbe: $k=(n-1)q+m \leq (q-1)(n-1)+2m$, da cui $n \leq m+1$, il che è in contrasto con la (5).

Si osservi che esistono di fatto archi massimali rispetto alla specie, sia completi che incompleti. Si considerino all'uopo in un piano $S_{2,q}$ una conica $\mathcal{C}$, un suo punto T e la tangente t in T a $\mathcal{C}$. L'insieme $S_{2,q}-(\mathcal{C}-T)-(t-T)$ è un $\{q^2-q+1, q\}$-arco massimale rispetto alla specie $m=1$; esso è completo se q è dispari; mentre, se q è pari, l'arco suddetto è incompleto e lo si completa aggregando ad esso il nucleo N di $\mathcal{C}$ (che appartiene a t). Per altri esempi, cfr. il n. 6 della successiva Nota II.

3. Sia K un $\{k, n\}$-arco completo di specie m di π_q. Ci proponiamo in questo numero di determinare una limitazione inferiore per k.

Le coppie (Q, r), costituite da un punto Q esterno a K e da una n-secante, r, per Q sono in numero di $N=(q+1-n)t_n$ (ogni n-secante r contenendo $q+1-n$ punti Q esterni a K). D'altra parte, poiché K è completo, da ogni punto Q esterno a K passa almeno una n-secante r e quindi Q individua almeno una coppia (Q, r); onde

$$N=(q+1-n)t_n \geq q^2+q+1-k, \tag{6}$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, per ogni punto Q esterno a K passa una sola n-secante. Supponiamo dapprima $m \geq 1$. Risulta $st_s \geq mt_s$ (per $s=m, \cdots, n-1$) e quindi:

$$\sum_{s=m}^{n-1} st_s \geq m \sum_{s=m}^{n-1} t_s, \tag{7}$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, $t_s=0$, per $s=m+1, \cdots, n-1$, cioè se, e soltanto se, K è di tipo (m, n). Dalle (1), (3) e dalla (7) si ha:

$$k(q+1) \geq t_n(n-m)+m(q^2+q+1), \tag{8}$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, l'arco K è di tipo (m, n). Dalla (8), tenuto conto della (6), si ha infine:

$$k \geq (q^2+q+1)\frac{m(q-n)+n}{(q+1)^2-nq-m}. \tag{9}$$

il segno d'uguaglianza avendosi, se, e soltanto se, esso vale contemporaneamente nelle (6) e (7), cioè se, e soltanto se, l'arco è di tipo (m, n) e per ogni punto esterno a K passa una sola n-secante.

Nel successivo n. 6, proposizione IX, dimostreremo che un arco siffatto deve necessariamente coincidere con un subpiano $\pi_{\sqrt{q}}$ di π_q, oppure con il complementare π_q – H, di un arco hermitiano H, ove per arco hermitiano s'intende un $\{q\sqrt{q}+1, \sqrt{q}+1\}$-arco di tipo $(1, \sqrt{q}+1)$.

Supponiamo ora $m = 0$. Si ha: $\sum_{s=1}^{n-1} st_s \geq \sum_{s=1}^{n-1} t_s = q^2 + q + 1 - t_0 - t_n$, in forza della (1), il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, l'arco è di tipo $(0, 1, n)$ o $(0, n)$. Dalla (3) e dalla precedente disuguaglianza si ha:

$$k(q+1) \geq q^2 + q + 1 - t_0 + t_n(n-1), \tag{10}$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, l'arco è di tipo $(0, 1, n)$ o $(0, n)$. D'altra parte si ha (per la (1)):

$$q^2 + q + 1 - t_0 = \sum_{s=1}^{n} t_s \geq t_n, \tag{11}$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e soltanto se, l'arco è di tipo $(0, n)$. Dalle (10) e (11) si ha:

$$k(q+1) \geq nt_n, \tag{12}$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, esso vale nelle (10) e (11), cioè se, e soltanto se, K è di tipo $(0, n)$. In virtù della (6) e della (12) si può dunque scrivere:

$$k \geq \frac{(q^2+q+1)n}{q^2 - q(n-2) + 1}, \tag{13}$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, l'arco è di tipo $(0, n)$ e da ogni punto Q esterno a K esce una sola n-secante ad esso; ciò è manifestamente assurdo, onde nella (13) non può valere il segno d'uguaglianza. Notiamo che la (9), per $m = 0$, fornisce la (13). Possiamo pertanto concludere con la seguente proposizione:

IV. – *Un* $\{k, n\}$*-arco completo di specie* $m \geq 0$ *di* π_q *è tale che per esso sussiste la* (9), *il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se,* $m \neq 0$, *l'arco è di tipo* (m, n) *e da ogni punto esterno ad esso passa una sola n-secante, cioè* (*cfr. proposizione IX, del n. 6*) *se, e soltanto se,* K *è un subpiano* $\pi_{\sqrt{q}}$ *di* π_q, *oppure il complementare* π_q — H *di un arco hermitiano* H.

4. Poiché la specie m di un $\{k, n\}$-arco K di π_q soddisfa alla (5), *ogni arco possiede almeno due caratteri*.

In questo numero e nei successivi ci proponiamo di studiare gli archi di π_q con precisamente due caratteri; pertanto, d'ora innanzi, K denoterà sempre un arco di tipo (m, n). Per $m = 0$, risulta $k = (n-1)q + n$; infatti, per un punto P dell'arco possono passare soltanto n-secanti, il che fornisce $k=(q+1)(n-1)+1=(n-1)q+n$ ed allora deve aversi necessariamente $q\equiv 0 \pmod{n}$, cfr. [1]. Questi archi sono già stati oggetto di studio in [2], dove se ne dimostra l'esistenza per opportuni valori di q e di n. In seguito supporremo perciò $m \neq 0$.

Sia u_s $(s=m\,,\,n)$ il numero delle s-secanti di K uscenti da un punto Q non appartenente K. Risulta allora:

$$\left\{\begin{array}{l} mu_m+nu_n=k\,, \\ u_m+u_n=q+1\,. \end{array}\right. \tag{14}$$

Risolvendo il sistema precedente si ha:

$$u_n=\frac{k-m(q+1)}{n-m}\quad,\quad u_m=\frac{n(q+1)-k}{n-m}\,, \tag{15}$$

Sia v_s $(s=m\,,\,n)$ il numero delle s-secanti a K uscenti da un suo punto P. Dev'essere:

$$\left\{\begin{array}{l} (m-1)\,v_m+(n-1)\,v_n=k-1\,, \\ v_m+v_n=q+1\,. \end{array}\right. \tag{16}$$

Il sistema precedente fornisce:

$$v_n=\frac{k+q-(q+1)\,m}{n-m}\quad,\quad v_m=\frac{n(q+1)-k-q}{n-m}\,. \tag{17}$$

Dalle (1) e (3) si ricava:

$$t_n=\frac{k(q+1)-m(q^2+q+1)}{n-m}\quad,\quad t_m=\frac{n(q^2+q+1)-k(q+1)}{n-m}\,. \tag{18}$$

Gli interi u_n , u_m , v_n , v_m sono delle costanti al variare rispettivamente di Q fuori di K e di P su K. Poiché esistono di fatto delle n-secanti di K, dovrà essere $u_n \geq 1$, e quindi K *risulta completo*. Dalla prima delle (15) e dalla (4) si ha allora:

$$mq+n\leq k\leq (n-1)\,q+m. \tag{19}$$

Un arco di tipo $(m\,,\,n)$ per cui k assuma l'uno o l'altro dei valori estremi della (19) sarà detto arco *estremale*, e precisamente: *massimale* se $k=(n-1)\,q+m$, *minimale* se $k=mq+n$.

5. Dato un $\{k\,,n\}$-arco K di tipo $(m\,,n)$, l'insieme $\pi_q - \mathrm{K}$ è un $\{\bar{k}\,,\bar{n}\}$-arco $c\mathrm{K}=\bar{\mathrm{K}}$, di tipo $(\bar{m}\,,\bar{n})$, con

$$\bar{k}=q^2+q+1-k\quad,\quad \bar{n}=q+1-m\quad,\quad \bar{m}=q+1-n\,. \tag{20}$$

$\bar{\mathrm{K}}$ prende il nome di *complementare dell'arco* K. Osserviamo che se K è massimale, $\bar{\mathrm{K}}$ è minimale, e viceversa, come segue dalla (20).

Le n-secanti di K nel piano π_q^*, duale di π_q, costituiscono un $\{k_1, n_1\}$-arco $K_1 = d_1 K$, di tipo (m_1, n_1), ove

$$(21)\qquad \begin{cases} k_1 = t_n = \dfrac{k(q+1) - m(q^2+q+1)}{n-m} \quad , \quad n_1 = v_n = \dfrac{k+q-(q+1)m}{n-m} \,, \\ m_1 = u_n = \dfrac{k-m(q+1)}{n-m} \,. \end{cases}$$

Infatti, in π_q le n-secanti di K sono in numero di t_n. Da ogni punto P di K escono $v_n = [k+q-(q+1)m]/(n-m)$ rette secanti di K e da ogni punto Q esterno a K escono $u_n = [k-m(q+1)]/(n-m)$ rette n-secanti come si ha dalle prime delle (15), (17) e (18).

Analogamente, le m-secanti di K nel piano π_q^* costituiscono un $\{k_2, n_2\}$-arco $K_2 = d_2 K$, di tipo (m_2, n_2), ove

$$(22)\qquad \begin{cases} k_2 = t_m = \dfrac{n(q^2+q+1) - k(q+1)}{n-m} \quad , \quad n_2 = u_m = \dfrac{n(q+1)-k}{n-m} \,, \\ m_2 = v_m = \dfrac{n(q+1)-k-q}{n-m} \,. \end{cases}$$

K_1 e K_2 si diranno *archi duali di* K. Essi sono evidentemente ciascuno il complementare dell'altro; nel loro studio ci si può limitare all'esame di uno solo di essi, ad esempio K_1. In forza delle (21), con facili calcoli si ottiene:

$$(23)\qquad k_1 = m_1 q + n_1 + q\,\frac{m-1}{n-m}\,,$$

$$(24)\qquad k_1 = (n_1 - 1)\,q + m_1 - q\,\frac{q-n}{n-m}\,.$$

Le (23), (24) mostrano che:

V. – *Il duale* K_1 *di un* $\{k\,, n\}$-*arco* K *di tipo* $(m\,, n)$ *risulta massimale se, e soltanto se,* $n = q$; *risulta minimale se, e soltanto se,* $m = 1$.

Nell'insieme degli archi K a due caratteri di π_q, rimangono definiti, per quanto precede, i tre operatori c, d_1, d_2, che fanno rispettivamente passare da K al complementare $\bar{K}$ ed ai duali K_1 e K_2. Si è già osservato che c è involutorio e ciò – come ora mostreremo – accade anche per d_1 e per d_2. Infatti, l'arco $d_1 K_1$ è l'insieme dei punti di π_q da cui escono n_1 rette n-secanti di K; dalla seconda delle (21) si ha che tale insieme coincide con K. Analogamente si prova che d_2 è involutorio. Si ha poi facilmente che:

$$(25)\qquad d_1 = d_2\, c = c\, d_2 \quad , \quad d_2 = d_1\, c = c\, d_1 \quad , \quad c = d_1\, d_2 = d_2\, d_1 \,.$$

Da quanto precede risulta che:

VI. – *Gli operatori* c, d_1, d_2, *definiti nell'insieme degli archi* K *a due caratteri, di* π_q *sono tali che per essi vale il seguente diagramma commutativo:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, leftrightarrow, "c"] \arrow[d, leftrightarrow, "d_1"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "d_2"] & \bar{K} \arrow[d, leftrightarrow, "d_1"] \arrow[dl, leftrightarrow, "d_2"'] \\ K_1 \arrow[r, leftrightarrow, "c"'] & K_2 \end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. BARLOTTI, *Sui $\{k, n\}$–archi di un piano lineare finito*, « Boll. U.M.I. » (3), *11*, 553–556 (1956).

[2] A. COSSU, *Su alcune proprietà dei $\{k, n\}$–archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito*, « Rend. di Mat. » (5), *20*, 271–277 (1961).

[3] B. D'ORGEVAL, *Sur certains $\{k, 3\}$–arcs en géométrie de Galois*, « Bull. Acad. Belg. Cl. Sci. », *46*, 597–603 (1960).

[4] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[5] B. SEGRE, *Forme e geometrie hermitiane, con particolare riguardo al caso finito*, « Ann. di Mat. » (4), *70*, 1–202 (1965).

[6] M. TALLINI SCAFATI, *Sui $\{k, n\}$–archi di un piano grafico finito*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *40*, 1–6 (1966).