Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Salmon

Su un problema posto da P. Samuel

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.5, p. 801–803.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_801_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Algebra. — *Su un problema posto da P. Samuel* [(*)]. Nota di PAOLO SALMON, presentata [(**)] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — It is shown by an example that the fact that a local ring A is noetherian, complete and factorial does not always imply that the ring of the formal power series over A is factorial.

1. In un articolo apparso nel 1961 (cfr. [3]), P. Samuel ha sollevato la seguente questione, riproducendola poi in varie sue pubblicazioni successive [(1)]: « Sia A un anello locale noetheriano, completo e fattoriale; l'anello delle serie formali A [[T]] è fattoriale ? ».

Vari esempi relativi alla fattorialità ed alla non-fattorialità di anelli A [[T]], con A locale fattoriale, dovuti in gran parte a P. Samuel, lasciavano sospettare una risposta positiva a tale questione. In questa Nota mostro invece, con un controesempio, che in generale non si può rispondere al quesito in modo affermativo. Si ha infatti: siano k un corpo, X , Y , Z , U delle indeterminate su k; allora l'anello $A = k(U)\,[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^3 + UY^6)$ è fattoriale, mentre A [[T]] non è fattoriale.

2. La costruzione del controesempio indicato nel n° 1 è fondata sulle due proposizioni seguenti.

PROPOSIZIONE 1. – *Siano* A *un anello locale regolare di dimensione* 3 *ed* f *un elemento primo di* A. *Allora l'anello* A/f *è fattoriale se e solo se* f *non può scriversi come determinante di ordine* $s \geq 2$ *ad elementi non invertibili di* A.

La proposizione 1 è stata da me stabilita nell'articolo [1], che costituisce una redazione provvisoria di un lavoro dal medesimo titolo che apparirà prossimamente (cfr. [2]).

PROPOSIZIONE 2. – *Siano* K *un corpo,* X , Y , Z *indeterminate su* K. *Allora, per ogni intero* $j \geq 0$, *l'anello* $K[X, Y, Z]/(Z^2 + X^3 + Y^{1+6j})$ *è fattoriale.*

Una dimostrazione della proposizione 2 trovasi in [4] (cfr. Ch. I, th. 8.1, p. 31); si può vedere anche Bourbaki, Algèbre commutative, Ch. VII, § 3, exercise 7.

La dimostrazione della seguente proposizione 3, che deriva dalla proposizione 1, sarà qui indicata sommariamente; maggiori dettagli saranno dati in [2].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 44 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 maggio 1966.

(1) Vedasi, ad esempio: P. SAMUEL, *Sur les anneaux factoriels*, « Bull. Soc. Math. France », *89*, 155–173 (1961) (remarque sur les complétés). *Classes de diviseurs et dérivées logarithmiques*, « Topology », *3*, 81–96 (1964) (remarque 1, prop. 4). Vedasi anche [4] (remark 4, theor. 9.1).

PROPOSIZIONE 3. – *L'anello* $A = k(U)[[X, Y, Z]]/(Z^2+X^3+UY^6)$ *è fattoriale se e solo se l'equazione* $v^2+w^3 = -U$ *non è risolubile con* v, w *in* $k(U)$.

Poniamo $K = k(U)$. Tenendo conto della proposizione 1 e del fatto che la forma iniziale di $f = Z^2 + X^3 + UY^6$ è di secondo grado si ha subito: A è fattoriale se e solo se non esistono degli elementi a, b, c, d appartenenti all'ideale $(X, Y, Z)\,K[[X, Y, Z]]$ tali che $f = ac + bd$. Si vede poi facilmente, applicando il teorema di preparazione di Weierstrass ed il teorema dell'intersezione di Krull, che possiamo fare le supposizioni seguenti: $a = h+Z$, ove $h \in (X, Y)\,K[[X, Y]]$; $c = -h+Z$; $b, d \in (X, Y)\,K[[X,Y]]$. Si ha allora: A è fattoriale se e solo se non esistono degli elementi b, d, h appartenenti all'ideale massimale dell'anello $K[[X, Y]]$ tali che $X^3+UY^6 = bd - h^2$.

Si possono ora riapplicare i teoremi già citati di Weierstrass e di Krull e supporre quindi che sia: $b = b_0+X$; $d = d_0+d_1 X+X^2$; $b_0, d_0, d_1, h \in YK[[Y]]$. Ne segue che A è fattoriale se e solo se l'equazione

$$UY^6 = b_0^3 - h^2 \tag{1}$$

non ha soluzioni con b_0, h in $YK[[Y]]$. È quindi facile controllare che può porsi $b_0 = -Y^2 w$, $h = Y^3 v$, $v, w \in K[[Y]]$.

Si può allora nella (1) dividere per Y^6 e confrontare i termini noti delle serie risultanti nei due membri, deducendone la validità dell'asserto.

La proposizione seguente deriva dalla proposizione 2.

PROPOSIZIONE 4. – *Siano* k *un corpo e* $k[U]_{(U)}$ *il localizzato dell'anello* $k[U]$ *nell'ideale massimale* (U). *Allora, per ogni intero* $j \geq 0$, *l'equazione*

$$v^2 + w^3 = -U^{1+6j} \tag{2}$$

non è risolubile con v, w *appartenenti all'ideale* $Uk[U]_{(U)}$.

Infatti, in caso contrario, si avrebbe nell'anello $k[X, U, Z]_{(X,U,Z)}$ la relazione:

$$Z^2+X^3+U^{1+6j} = (Z+v)(Z-v) - (w-X)(w^2+wX+X^2),$$

dalla quale segue subito (ad esempio, in virtù della proposizione 1) la non fattorialità dell'anello $B = k[X, U, Z]_{(X,U,Z)}/(Z^2+X^3+U^{1+6j})$. Ma B è un anello di frazioni dell'anello $k[X, U, Z]/(Z^2+X^3+U^{1+6j})$ che è fattoriale per la proposizione 2. Assurdo.

3. LEMMA. – *Siano* A *un anello fattoriale,* K *il corpo delle frazioni di* A, a, b *e* c, d *due coppie di elementi relativamente primi di* A. *Se in* K *si ha:* $a/b + c/d \in A$, b *e* d *risultano elementi associati in* A.

Posto $e = a/b+c/d$, si ha $ad+bc = bde$, da cui segue, essendo b primo con a: b divide d. Analogamente: d divide b.

COROLLARIO. – *Se vale in* $k(U)$ *la relazione*

$$(a/b)^2 + (c/d)^3 = -U, \quad \textit{ove } a, b, c, d \in k[U]_{(U)},$$

esiste un intero $j \geq 0$ *tale che* b *e* d *sono rispettivamente associati a* U^{3j} *e* U^{2j}.

L'anello $A = k[U]_{(U)}$ è una schiera valutante discreta del corpo $k(U)$. Se allora b e d sono rispettivamente associati in A a U^m e U^n, si ha per il lemma: U^{2m} è associato in A a U^{3n}. Ne segue $2m = 3n$ ed esiste quindi un intero $j \geq 0$ tale che $m = 3j$, $n = 2j$; donde l'asserto.

Siamo adesso in grado di dimostrare la validità del « controesempio » indicato nel n. 1, e cioè la

PROPOSIZIONE 5. – *Siano k un corpo,* X, Y, Z, U *delle indeterminate. Si ha:*

i) l'anello $A = k(U)[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^3 + UY^6)$ *è fattoriale;*

ii) l'anello $A[[T]]$ *non è fattoriale.*

L'asserzione *i*) equivale, per la proposizione 3, alla seguente: l'equazione

$$v^2 + w^3 = -U \qquad v, w \in k(U) \tag{3}$$

non è risolubile.

Se $v, w \in k(U)$, poniamo: $v = a/b$, $w = c/d$ con a, b e c, d elementi relativamente primi di $k[U]_{(U)}$.

Si vede allora, per il corollario al lemma, che la solubilità di (3) equivale alla solubilità dell'equazione

$$a^2 + c^3 = -U^{1+6j} \qquad a, c \in k[U]_{(U)}, \tag{4}$$

dove j è un intero ≥ 0.

Ma la (4) non può essere risolubile per nessun valore di j; altrimenti, moltiplicando i due membri della (4) per U^6 si contraddirebbe la proposizione 4. Dunque *i*) è vera.

L'asserzione *ii*) è una conseguenza immediata di un ben noto teorema di Samuel (cfr. [3], théor. 2.1); la prova è così completa.

BIBLIOGRAFIA.

[1] P. SALMON, *Sulla fattorialità delle algebre graduate e degli anelli locali*. Edizioni Scientifiche. Genova 1964.

[2] P. SALMON, *Sulla fattorialità delle algebre graduate e degli anelli locali*, « Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova » (1967) (in preparazione).

[3] P. SAMUEL, *On unique factorisation domains*, « Illinois J. Math. », 5, 1–17 (1961).

[4] P. SAMUEL, *Lectures on unique factorisation domains* (Notes by P. Murthy), Tata Inst. of fund. res., Bombay 1964.