
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MIRON NICOLESCU, CIPRIAN FOIAS

Sur l'unicité du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 40 (1966), n.5, p. 785–791.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_785_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sur l'unicité du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur.* Nota di MIRON NICOLESCU e CIPRIAN FOIAS, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

RIASSUNTO. — Si mostra l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore (1) nella classe delle funzioni verificanti la (4).

1. Dans la Note [II] nous avons obtenu, comme conséquence à la représentation de Poisson des solutions de l'équation de la chaleur

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad 0 < y < \delta \quad , \quad -\infty < x < \infty ,$$

l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour (1) dans la classe des solutions vérifiant

$$(2) \quad \sup_{0 \leq y \leq \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Kx^2} u^-(x, y) dx < +\infty ,$$

où u^- désigne la partie négative de u : $u^- = \max \{-u, 0\}$ et K est une constante ≥ 0 convenable dépendant de u . Cette classe contient évidemment la classe des fonctions telles que

$$u(x, y) \geq -Me^{Kx^2} \quad , \quad 0 \leq y \leq \delta \quad , \quad -\infty < x < \infty ,$$

classe qui a été déjà considérée par P. Bessala-M. Krzyżański [3] et A. Friedman [2] (même pour des équations paraboliques très générales). Il est aussi bien évident que cette dernière classe contient celles considérées ou bien dans le théorème de Tihonov [7] (voir aussi [4]) ou dans celui de Widder [8]. Toutefois notre classe (définie par (2)) ne contient pas la classe d'unicité considérée (aussi dans un cas plus général) par L. Slobodeckii [5] (voir aussi [3], p. 60) et A. Friedman (voir par exemple [2], théorème 16), notamment celle des solutions de (1) vérifiant

$$(3) \quad \int_0^\delta dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Kx^2} |u(x, y)| dx < \infty .$$

Le but de cette Note est de prouver que les méthodes employées dans nos Notes [I] et [II] permettent, avec des changements mineurs, d'obtenir l'unicité dans une classe englobant toutes les classes que nous venons de mentionner. Notamment nous allons prouver le suivant.

(*) Nella seduta del 14 maggio 1966.

THÉORÈME D'UNICITÉ. - *L'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur (1) (dans la bande $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \delta$) a lieu dans la classe des fonctions vérifiant l'inégalité*

$$(4) \quad \int_0^\delta dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Kx^2} u^-(x, y) dx < +\infty,$$

où K est une constante ≥ 0 convenable dépendant de u .

Avant de passer à la démonstration (reposant sur le théorème d'unicité de [II], c'est-à-dire sur l'unicité dans la classe des solutions vérifiant (2)) il faut remarquer que ce théorème ne contient pas tous les théorèmes d'unicité connus pour l'équation de la chaleur. Ainsi la classe d'unicité de notre théorème est différente des classes d'unicité de S. Täcklind [6] qui se définissent comme suit:

$$|u(t, x)| \leq M e^{K \cdot |x| h(|x|)} \quad , \quad -\infty < x < \infty,$$

où $h(x)$ est une fonction positive pour $x > 0$ telle que

$$(5) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{\tilde{h}(x)} = \infty,$$

$\tilde{h}(x)$ étant la plus grande minorante non-décroissante de $h(x)$. Ainsi une classe d'unicité englobant à la fois la classe définie par (4) et celle définie ci-dessus serait celle des fonctions vérifiant

$$\int_0^\delta dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x| h(|x|)} u^-(x, y) dx < \infty$$

où $h(x)$ vérifie la condition (5) de Täcklind. Si cette classe est ou non une classe d'unicité semble être un problème encore ouvert.

2. Passons maintenant à la démonstration du théorème. Dans ce but soit $u(x, y)$ une solution de (1) dans la bande

$$(6) \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad 0 < y \leq \delta$$

vérifiant (4) avec

$$(7) \quad 0 \leq K < \frac{1}{4\delta}.$$

Tout comme dans la Note [II] nous allons reprendre les considérations des Notes précédentes [I], [II] en indiquant seulement les compléments nécessaires. Dans ce but, les formules des Notes [I] et [II] seront indiquées par leur numéro suivi du numéro de la Note dans laquelle ces formules sont

données. Partons comme nous l'avons déjà fait dans [I] et [II] de la formule

$$\begin{aligned}
 (10.I) \quad u(x, y) = & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)u(r, \eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(2R-r-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=r} - \frac{(2R-r-x)u(r, \eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta \\
 & - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{(x-R)u(R, \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} d\eta \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-h)} \int_r^R \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} - e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \right] \cdot u(\xi, h) d\xi
 \end{aligned}$$

où

$$-\infty < r < x < R < \infty, \quad 0 < h < y \leq \delta.$$

Pour $R \rightarrow \infty$ la deuxième intégrale dans (10.I) tend manifestement vers zero. En ce qui concerne la troisième nous avons d'une part

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{(x-R)u(R, \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} d\eta \geq \\
 & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{(R-x)u^-(R, \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} d\eta
 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 & \int_{x+1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{(R-x)u^-(R, \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} d\eta \right] dR = \\
 & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \int_{x+1}^{\infty} e^{KR^2 - \frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{(R-x)u^-(R, \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} e^{-KR^2} d\eta dR \\
 & \leq C_1 \int_h^y \int_{x+1}^{\infty} e^{-KR^2} u^-(R, \eta) dR d\eta \leq C_1 \int_0^{\delta} I(\eta) d\eta < \infty,
 \end{aligned}$$

où C_1 est une constante telle que

$$C_1 \geq \frac{R-x}{(y-\eta)^{3/2}} e^{KR^2 - \frac{(R-x)^2}{4(y-\eta)}}, \quad x+1 \leq R < \infty, \quad h \leq \eta < y$$

(ici on utilise le fait $K < \frac{1}{4\delta}$) et

$$(9) \quad I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Kx^2} u^-(x, y) dx,$$

de sorte que la dernière inégalité découle de (4). Il en résulte qu'il existe une suite $R_k \rightarrow \infty$ telle que

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-R_k)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{(R_k-x) \cdot u^-(R_k, \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} d\eta \rightarrow 0.$$

Donc, compte tenu de (8), (10.1) devient

$$\begin{aligned} u(x, y) \geq & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=r} - \frac{(x-r) \cdot u(r, \eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta \\ & + \limsup_{R_k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-h)} \int_r^{R_k} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} - e^{-\frac{(R_k-x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \right] u(\xi, h) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Désignons par $F_h(u)$ la dernière parenthèse et prenons un h tel que

$$(10) \quad I(h) < \infty.$$

Alors en reproduisant les considérations de la Note [II], p. 624, on arrive à

$$\begin{aligned} u(x, y) \geq & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=r} - \frac{(x-r) u(r, \eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta \\ & - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-h)} \int_r^{R_k} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u^-(\xi, h) d\xi + \limsup_{R_k \rightarrow \infty} F_h(u^+), \end{aligned}$$

où $u^+ = \max\{u, 0\}$. En répétant maintenant les considérations qui nous ont conduit dans [I] de (12.1) à (13.1), sans aucun changement, on obtient

$$\begin{aligned} (13.1) \quad u(x, y) \geq & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=r} - \frac{(x-r) u(r, \eta)}{2(y-\eta)^{3/2}} \right] d\eta \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-h)} \int_r^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h) d\xi, \end{aligned}$$

(où la dernière intégrale converge absolument). Cette fois-ci la formule (13.1) est vraie seulement pour les valeurs de h vérifiant $0 < h < y$ et (10).

Tout comme dans le cas de la Note [II], on n'a maintenant qu'à reprendre les passages à la limite du n° 3 de [I] non pas pour $R \rightarrow \infty$ arbitrairement,

mais tout comme auparavant pour une suite convenablement choisie. On arrive ainsi de (16.I) à (16'.I), puis en fixant un $h > 0$ vérifiant en outre aussi (10), on déduit (17.I). Ainsi on obtient sans aucun changement dans l'argumentation, l'inégalité

$$(18.I) \quad u(x, y) \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-h)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h) d\xi$$

valable pour

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < h < y \leq \delta,$$

h vérifiant de plus (10). A partir de là, en répétant exactement les raisonnements faits dans les n° 4 et 5 de [I] on déduit

$$(11) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-h)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h) d\xi$$

pour

$$(12) \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < h < y < \delta, \quad I(h) < \infty.$$

3. Nous allons finalement montrer que la condition (10) imposée à h (c'est-à-dire la dernière des conditions (12)) peut être écartée.

En effet supposons que h vérifie (12) sauf la dernière condition. En vertu de la condition (4), il existe un η tel que $0 < \eta < h$, $I(\eta) < \infty$. Par conséquent, d'après ce que nous venons d'établir

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \cdot u(\xi, \eta) d\xi,$$

$$u(x, h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(h-\eta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(h-\eta)}} \cdot u(\xi, \eta) d\xi,$$

où les deux intégrales convergent absolument. Par suite les calculs suivants sont corrects:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-h)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h) d\xi = \\ & \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-h)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}(h-\eta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-\zeta)^2}{4(h-\eta)}} \cdot u(\zeta, \eta) d\zeta d\xi = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} u(\zeta, \eta) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}}{2\sqrt{\pi}(y-h)} \cdot \frac{e^{-\frac{(\xi-\zeta)^2}{4(h-\eta)}}}{2\sqrt{\pi}(h-\eta)} d\xi \right) d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4(y-\eta)}}}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)} u(\zeta, \eta) d\zeta = u(x, y) \end{aligned}$$

ce qui établit la représentation (11) dans la condition (10).

En résumant nous avons obtenu le suivant

THÉORÈME DE REPRÉSENTATION. — Soit $u(x, y)$ une solution de l'équation de la chaleur dans la bande: $-\infty < x < +\infty$, $0 < y \leq \delta$, vérifiant la condition

$$\int_0^\delta dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Kx^2} u^-(x, y) dx < \infty$$

où $K < \frac{1}{4\delta}$. Alors pour tous $-\infty < x < \infty$, $0 < h < y < \delta$ on a la formule de représentation de Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h) d\xi,$$

l'intégrale convergeant absolument.

4. Remarquons que ce théorème ne donne pas la représentation aussi pour le cas $h = 0$. Pour cela on ne peut plus appliquer le raisonnement du n° 6 de [I] (comme c'était le cas dans la Note [II]) pour obtenir le théorème d'unicité. Toutefois le théorème d'unicité énoncé au n° 1, découle aisément du théorème de représentation que nous venons d'établir et du théorème d'unicité de [II].

En effet, supposons que $u_1(x, y)$ et $u_2(x, y)$ soient deux solutions de (1) vérifiant la condition (4) avec une même constante K (ce qui est toujours possible en augmentant au besoin cette constante) et telles que $u_1(x, 0) \equiv u_2(x, 0)$.

En vertu du théorème de représentation du n° 3 nous avons pour tous $0 < h < y < \min \left\{ \delta, \frac{1}{4K} \right\}$ et $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-h)}} |u_j(\xi, h)| d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-h)}} u_j(\xi, h) d\xi \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-h)}} \cdot u_j^-(\xi, h) d\xi \leq u_j(0, y) + 2 I_j(h), \end{aligned}$$

où

$$I_j(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Kx^2} u_j^-(x, h) dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-h)}} u_j^-(\xi, h) d\xi.$$

Par conséquent en fixant y et en prenant $\delta_1 = y/2$ nous obtenons

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K_1 x^2} |u_j(x, h)| dx \leq u_j(0, y) + 2 I_j(h), \quad 0 < h < \delta_1,$$

où $K_1 = \frac{1}{2y}$. Considérons maintenant la fonction

$$U(x, y) = \int_0^y [u_1(x, h) - u_2(x, h)] dh,$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \delta_1.$$

Evidemment $U(x, y)$ est une solution de (1) (on utilise le fait que $u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$). De plus, en vertu de (13) nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K_1 x^2} U^-(x, y) dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K_1 x^2} |U(x, y)| dx \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K_1 x^2} dx \int_0^y |u_j(x, h)| dh \leq \sum_{j=1}^2 \int_0^{\delta_1} dh \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K_1 x^2} |u_j(x, h)| dx \\ &\leq \delta_1 \sum_{j=1}^2 |u_j(0, y)| + 2 \sum_{j=1}^2 \int_0^{\delta_1} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K_1 x^2} |u_j^-(x, y)| dx, \end{aligned}$$

ce qui montre que $U(x, y)$ vérifie la condition (2). Ainsi, par le théorème d'unicité de [II] nous avons $U(x, y) = 0$ pour $0 \leq y \leq \delta_1$. En dérivant par rapport à y , on obtient $u_1(x, y) = u_2(x, y)$ quel que soit $0 \leq y \leq \delta_1$. En répétant cet argument sur la bande $-\infty < x < +\infty$, $\delta_1 \leq y \leq \delta$ et ainsi de suite on en arrive à $u_1(x, y) = u_2(x, y)$ dans toute la bande considérée, ce qui achève la démonstration du théorème d'unicité.

LITTÉRATURE.

- [1] P. BESALA e M. KRZYŻAŃSKI, *Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire normale parabolique du second ordre*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, 37, 230-236 (1962).
- [2] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.
- [3] M. KRZYŻAŃSKI, *Solutions of a linear second order equation of parabolic type defined in an unbounded domain*, Differential Equations and their Applications (Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962), 55-63 (Prague 1964).
- [4] M. NICOLESCU, *Sur l'équation de la chaleur*, « Commentarii Math. Helv. », 10, 3-17 (1937).
- [5] L. N. SLOBODECKII, *La solution fondamentale et le problème de Cauchy pour un système parabolique*, « Math. Sbornik » (N.S.), 46 (88), 229-258 (1958), (en russe).
- [6] S. TÄCKLIND, *Sur les classes quasi-analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique*, « Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsala », 10, 3 (1936).
- [7] A. B. TIHONOV, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, « Mat. Sbornik », 42, 199-216 (1935).
- [8] D. V. WIDDER, *Positive temperatures in an infinite rod*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 55, 85-95 (1944).
- [I] M. NICOLESCU e C. FOIAS, *Représentation de Poisson et le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur*, « Rend. Acad. Naz. Lincei », VIII, 38, 466-476 (1965).
- [II] M. NICOLESCU e C. FOIAS, *Représentation de Poisson et le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur*, II, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, 38, 621-626 (1965).