Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luciano de Vito, Gaetano Fichera, Alfonso Fusciardi, Marco Schaerf

Sul calcolo degli autovalori della piastra quadrata incastrata lungo il bordo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.5, p. 725–733.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_725_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 maggio 1966

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Analisi numerica. — *Sul calcolo degli autovalori della piastra quadrata incastrata lungo il bordo* (*). Nota di LUCIANO DE VITO, GAETANO FICHERA, ALFONSO FUSCIARDI e MIRELLA SCHAERF, presentata (**) dal Corrisp. G. FICHERA.

SUMMARY. — An explicit construction for the Green's operator of the biharmonic problem is given. This result is used for estimating 51 eigenvalues of a clamped square plate by the method of orthogonal invariants.

Questo lavoro ha essenzialmente lo scopo di far conoscere i risultati dei calcoli numerici compiuti presso il Centro di calcolo della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, riguardanti un classico problema dell'Analisi quantitativa: la valutazione per difetto e per eccesso degli autovalori di una piastra quadrata incastrata lungo il suo bordo.

Il metodo seguito rientra, come caso particolare, in un procedimento generale sviluppato recentemente da uno degli autori del presente lavoro.

Il paragrafo 1 è dovuto a G. Fichera; il paragrafo 2 ad L. De Vito, il quale ha anche svolto, assistito da A. Fusciardi, tutti gli sviluppi analitici

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 21 del Comitato per la Matematica del C.N.R. e finanziato in parte dagli «Aerospace Research Laboratories» tramite l'European Office of Aerospace Research (OAR), United States Air Force (Grant N°: AF EOAR 64-50).

(**) Nella seduta del 14 maggio 1966.

relativi all'applicazione del metodo nel caso particolare considerato nel presente lavoro. Ad M. Schaerf si deve lo studio e la risoluzione numerica dei problemi algebrici connessi con l'applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz, nonché la programmazione e l'esecuzione sull'elaboratore elettronico di tutti i restanti calcoli numerici.

1. Se B è un campo (insieme aperto e connesso) dello spazio cartesiano reale X^r del punto $x \equiv (x_1, \cdots, x_r)$, indicheremo con $H_m(B)$ lo spazio di Hilbert delle funzioni reali dotate di tutte le derivate parziali forti in B fino all'ordine m incluso, munito del consueto prodotto scalare

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |p| \leq m} \int_B D^p u \, D^p v \, dx \qquad (dx = dx_1 \cdots dx_r).$$

Sia A un campo di X^r propriamente regolare (1). Considereremo in A il problema al contorno:

$$\Delta_2 \Delta_2 u = f \quad \text{in} \quad A, \tag{1}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su} \quad \partial A \tag{2}$$

$\left(\Delta_2 \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \ \frac{\partial}{\partial \nu} \equiv \text{derivata secondo la normale interna a } \partial A\right).$

La funzione f è assegnata in $H_0(A)$. Diciamo $\mathfrak{U}(A)$ la classe delle funzioni u che appartengono a $H_2(A) \cap H_4(B)$ al variare comunque del campo B in modo tale che $\overline{B} \subset A$. Ricercheremo in $\mathfrak{U}(A)$ la soluzione del problema (1), (2). Evidentemente le (2) implicano l'annullarsi delle tracce (nel senso delle funzioni di $H_2(A)$ (2)) di u e delle sue derivate prime e quindi - per noti risultati - l'appartenenza di u ad $\mathring{H}_2(A)$, cioè al sottospazio di $H_2(A)$ ottenuto come completamento - rispetto alla norma $\| u \|_2 = (u, u)_2^{1/2}$ - della classe $\mathring{C}^\infty(A)$ delle funzioni di classe C^∞ aventi supporto contenuto in A.

L'unicità della soluzione u di (1), (2) in $\mathfrak{U}(A)$ è evidente, dato che, per ogni $v \in \mathring{C}^\infty(A)$ si ha:

$$\int_A \Delta_2 u \, \Delta_2 v \, dx = \int_A f v \, dx$$

e quindi, se è $f = 0$: $\int_A (\Delta_2 u)^2 dx = 0$. D'altra parte è ovvia l'unicità in $H_2(A)$ della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace.

(1) Per la precisa definizione di *campo propriamente regolare* cfr. [3] p. 207. Un campo siffatto è - in brevi termini - un campo limitato da porzioni di ipersuperficie regolari, tale che $\partial A = \partial \bar{A}$, e verificante una *ipotesi del cono* (cfr. [7] p. 26).

(2) Cfr. [4] p. 64 e [7] pp. 24-25.

Poniamo, per ogni $v \in H_0(A)$:

$$Tv = \int_A s(x, y)\, v(y)\, dy,$$

essendo:

$$s(x, y) \begin{cases} = \dfrac{1}{2\pi} \log |x - y| & \text{per } r = 2, \\ = -\dfrac{1}{\omega_r} |x - y|^{2-r} & \text{per } r > 2 \end{cases}$$

(ω_r è eguale alla misura ipersuperficiale della sfera unitaria di X^r, moltiplicata per $r - 2$).

È ben noto che riesce: $T\, v \in H_2(B)$, essendo B un qualsiasi campo limitato di X^r.

Sia $\Omega(A)$ l'insieme delle funzioni armoniche in A, appartenenti ad $H_0(A)$. Tale insieme costituisce un sottospazio (varietà lineare chiusa) di $H_0(A)$. Sia P l'operatore che proietta ortogonalmente $H_0(A)$ su $\Omega(A)$. Posto:

$$G = T^2 - T\,PT, \tag{3}$$

la funzione $u = Gf$ è la soluzione in $\mathfrak{A}(A)$ del problema (1), (2).

È ovvia intanto l'appartenenza di Gf ad $\mathfrak{A}(A)$ e, d'altra parte, essendo $\Delta_2 Tv = v$, riesce: $\Delta_2 \Delta_2 Gf = f$. Sia $\varphi(x)$ una qualsiasi funzione di C^∞ a supporto limitato. Poniamo:

$$\omega(x) = \int_{X^r - A} s(x, y)\, \varphi(y)\, dy \quad , \quad v(x) = Tf - PT f.$$

Deve essere $(v, \omega)_0 = 0$, e quindi, per l'arbitrarietà di φ,

$$\int_A s(x, y)\, v(y)\, dy = 0, \tag{4}$$

per ogni $x \in X^r - \bar{A}$. Segue da ciò che la funzione rappresentata dall'integrale al primo membro della (4) e le sue derivate parziali prime hanno traccia nulla su ∂A. Ciò significa che Gf verifica le (2).

La (3) fornisce una costruzione concreta dell'*operatore di Green* G per il *problema biarmonico* (1), (2).

È opportuno notare che, nella (3), sostituendo l'operatore T con l'operatore di Green Γ per il problema di Dirichlet per il Δ_2, si ottiene sempre una rappresentazione dell'operatore G. Infatti si ha: $\Gamma = T + \Gamma_0$ essendo Γ_0 un operatore che trasforma ogni $v \in H_0(A)$ in una funzione armonica di $H_2(A)$. Riesce, pertanto, detto I l'operatore identità e O quello identicamente nullo: $(I - P)\,\Gamma_0 = O$. Si ha, quindi, anche: $\Gamma_0\, P = \Gamma_0$. Segue immediatamente da tali osservazioni:

$$G = \Gamma^2 - \Gamma P\, \Gamma. \tag{3'}$$

Consideriamo in $\mathfrak{A}(A)$ il problema di autovalori:

$$(5) \qquad \begin{cases} \Delta_2 \Delta_2 u - \lambda u = 0 & \text{in} \quad A, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su} \quad \partial A. \end{cases}$$

Con classico ragionamento si prova che tutti gli autovalori di (5) sono positivi e, posto $\mu = \lambda^{-1}$, il problema (5) è equivalente al problema di autovalori in $H_0(A)$:

$$(6) \qquad Gu - \mu u = 0.$$

La rappresentazione (3) o (3′) di G permette di applicare al problema (6) il metodo degli invarianti ortogonali per il calcolo degli autovalori descritto in [7] (cfr. anche [5] e [6]).

Per semplicità, e dato che questo è il caso del quale ci occuperemo in seguito, supporremo $r = 2$ ed il campo A semplicemente connesso. Riesce: $G \in \mathcal{C}^1$, ove la classe $\mathcal{C}^1$ è definita a p. 146 di [7]. Sia infatti $\{v_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ un sistema ortonormale e completo in $H_0(A)$. Si ha, posto: $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_0$ e $\|\cdot\|^2 = (\cdot, \cdot)$:

$$\Sigma_k (Gv_k, v_k) = \Sigma_k (\|Tv_k\|^2 - \|PTv_k\|^2) \leq$$

$$\leq \Sigma_k \|Tv_k\|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{A \times A} |\log|x - y||^2 \, dx \, dy.$$

Ciò prova l'asserto.

Nel presente lavoro ci serviremo del teor. 19. III di p. 160 di [7] per il calcolo per eccesso degli autovalori μ_k del problema (6), cioè per il calcolo per difetto degli autovalori λ_k di (5). Precisamente applicheremo il suddetto teorema scegliendo $s = 1$ ed $n = 2$. A tal fine diciamo $\{\omega_h\}$ il sistema di polinomi armonici ottenuto ordinando in successione tutte le seguenti funzioni

$$\Re (x_1 + ix_2)^k \quad , \quad \Im (x_1 + ix_2)^k, \qquad (k = 0, 1, \cdots).$$

Sia $\Omega_\rho(A)$ il sottospazio ρ–dimensionale di $\Omega(A)$ determinato da $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\rho$. Sia P_ρ il proiettore ortogonale di $H_0(A)$ su $\Omega_\rho(A)$. Poniamo:

$$(3_\rho) \qquad G_\rho = T^2 - TP_\rho T$$

oppure

$$(3'_\rho) \qquad G_\rho = \Gamma^2 - \Gamma P_\rho \Gamma$$

e

$$(7) \qquad \mathfrak{I}_1^2 (G_\rho) = \sum_{1}^{\infty}{}_k \|G_\rho v_k\|^2.$$

Sia $\{w_k\}$ un sistema di funzioni linearmente indipendenti, appartenenti a $\mathfrak{A}(A)$, verificanti le condizioni al contorno (2) e tali che il sistema

$\{\Delta_2 \Delta_2 w_k\}$ sia completo in $H_0(A)$. Diciamo $\lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \cdots \leq \lambda_n^{(n)}$ le radici (ciascuna ripetuta un numero di volte pari alla rispettiva molteplicità) della equazione secolare

$$\det \{ (\Delta_2 w_h , \Delta_2 w_k) - \lambda (w_h , w_k) \} = 0 \qquad (h , k = 1 , \cdots , n).$$

Il numero $\lambda_k^{(n)}$ è l'approssimazione (per eccesso) di Rayleigh–Ritz dell'autovalore λ_k $(k \leq n)$ di (5).

I valori per difetto $\tau_k^{(n,\varrho)}$ di λ_k sono dati dalla formula:

$$\tau_k^{(n,\varrho)} = \left\{ \vartheta_1^2 (G_\varrho) - \sum_{h=1}^{n}{}^{(k)} [\lambda_h^{(n)}]^{-2} \right\}^{-1/2} ; \tag{8}$$

con $\sum_{h=1}^{n}{}^{(k)} [\lambda_h^{(n)}]^{-2}$ si intende che nella somma non compare il termine $[\lambda_k^{(n)}]^{-2}$.

Al calcolo di G_ϱ provvede la formula (19.8) di p. 158 di [7], se G_ϱ è definito dalla (3_ϱ). Se invece G_ϱ si definisce mediante la $(3'_\varrho)$, e si assume come sistema $\{ v_h \}$ il sistema delle autofunzioni del problema di autovalori della membrana a bordo fisso:

$$\Delta_2 v + \sigma v = 0 \qquad \text{in } A,$$

$$v = 0 \qquad \text{su } \partial A,$$

allora può pervenirsi alla maggiorazione del resto della serie a secondo membro di (7).

È evidente che la conoscenza di una decomposizione di $H_0(A)$ in somma diretta di sottospazi invarianti per l'operatore G, facilita il calcolo delle approssimazioni di λ_k. Se H è un siffatto sottospazio e Q è il proiettore ortogonale su di esso, allora all'operatore G va sostituito l'operatore QGQ ed il metodo va applicato relativamente a quest'ultimo operatore.

Si ha che:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \varrho \to \infty}} \tau_k^{(n,\varrho)} = \lambda_k , \tag{9}$$

secondo quanto trovasi dimostrato in [7] (cfr. teor. 19. III) (3).

2. Supponiamo che A sia il campo definito dalle limitazioni $-\frac{\pi}{2} < x_i < \frac{\pi}{2}$, $(i = 1 , 2)$. Con π_i indichiamo l'asse x_i $(i = 1 , 2)$, con π_3 la bisettrice del primo e del terzo quadrante, con π_4 quella del secondo e del quarto. Con $H_0^{(\alpha_1 \alpha_2)}(A)$, $(\alpha_i = 0 , 1 ; i = 1 , 2)$ indicheremo il sottospazio di $H_0(A)$ costituito dalle funzioni che sono simmetriche rispetto all'asse π_i se $\alpha_i = 0$ e

(3) La dimostrazione della (9) richiede la completezza del sistema $\{\omega_h\}$ nello spazio $\Omega(A)$. Nelle ipotesi da noi assunte per A, tale completezza si prova osservando che, se $v \in \Omega(A)$ e $(v , \omega_h) = 0$, $(h = 1 , \cdots)$, riesce, per ogni $x \in X^2 - \bar{A}$, verificata la (4), come facilmente si prova. Ne viene che la funzione $u_0 = Tv$ è una soluzione in $\mathfrak{U}(A)$ del problema (1), (2) con $f \equiv 0$. Dall'essere $u_0 = 0$ segue $v = 0$.

antisimmetriche rispetto a questo asse se $\alpha_i = 1$, $(i = 1, 2)$. Con $H_0^{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)}(A)$, $(\alpha_i = 0, 1;\ i = 1, 2, 3, 4)$ denoteremo il sottospazio di $H_0^{(\alpha_1 \alpha_2)}(A)$ costituito dalle funzioni di questo che sono simmetriche rispetto alla retta π_j se $\alpha_j = 0$, $(j = 3, 4)$ e antisimmetriche rispetto a questa stessa retta se $\alpha_j = 1$, $(j = 3, 4)$. Considerato l'operatore G, introdotto nel paragrafo precedente, si riconosce subito che sussiste la seguente decomposizione di $H_0(A)$ in somma diretta di sottospazi invarianti per l'operatore G:

$$(10) \qquad H_0(A) = H_0^{(0000)}(A) \oplus H_0^{(0011)}(A) \oplus H_0^{(1100)}(A) \oplus \\ \oplus H_0^{(1111)}(A) \oplus H_0^{(01)}(A) \oplus H_0^{(10)}(A).$$

Indichiamo con H uno qualsiasi dei sottospazi che intervengono nella (10). Sia Q il proiettore ortogonale di $H_0(A)$ su H. Se P è il proiettore introdotto nel paragrafo 1, si ha che $v \in H$ implica $Pv \in H$, e pertanto:

$$(11) \qquad QPQ = PQ.$$

Ne segue $(QPQ)^2 = QPQ$. Sia $u \in H \cap \Omega(A)$; sarà allora $u = Pu = Qu$ e quindi $u = Pu = PQu = QPQu$. È così provato che QPQ è il proiettore ortogonale di $H_0(A)$ su $H \cap \Omega(A)$. Porremo $QPQ = P^{(H)}$.

Consideriamo la restrizione QGQ dell'operatore G al sottospazio invariante H. Dalla (3'), tenendo presente la (11) nonché la circostanza che H è sottospazio invariante per Γ, deduciamo:

$$QGQ = Q\Gamma^2 Q - Q\Gamma P\Gamma Q = (Q\Gamma Q)^2 - Q\Gamma PQ\Gamma Q = (Q\Gamma Q)^2 - Q\Gamma P^{(H)}\Gamma Q.$$

Il calcolo degli autovalori del problema (5) è ricondotto al calcolo degli autovalori dell'operatore

$$G^{(H)} = (Q\Gamma Q)^2 - Q\Gamma P^{(H)}\Gamma Q$$

per tutti gli H al secondo membro di (10).

Non ci resta che applicare il metodo descritto nel paragrafo 1, con la sola variante che, come operatore approssimante $G^{(H)}$, assumeremo:

$$G_\varrho^{(H)} = (Q\Gamma Q)^2 - Q\Gamma P_\varrho^{(H)}\Gamma Q;$$

il proiettore $P_\varrho^{(H)}$ si definisce alla maniera seguente: suddivisi i polinomi della successione $\{\omega_h\}$ in sei successioni corrispondenti ai sei sottospazi che intervengono nella (10), sia $\{\omega_k^{(H)}\}$ quella relativa al sottospazio H; $P_\varrho^{(H)}$ è allora il proiettore ortogonale di $H_0(A)$ sulla varietà lineare determinata da $\omega_1^{(H)}, \omega_2^{(H)}, \cdots, \omega_\varrho^{(H)}$.

Sia $\{w_k^{(H)}\}$ un sistema di funzioni linearmente indipendenti contenute in $H \cap \mathfrak{U}(A)$ e verificanti le condizioni al contorno (2), tali che il sistema $\{\Delta_2 \Delta_2 w_k^{(H)}\}$ sia completo in H. Diciamo $\tilde{\lambda}_1^{(n)} \leq \tilde{\lambda}_2^{(n)} \leq \cdots \leq \tilde{\lambda}_n^{(n)}$ le radici dell'equazione secolare

$$(12) \qquad \det\{(\Delta_2 w_h^{(H)}, \Delta_2 w_k^{(H)}) - \lambda (w_h^{(H)}, w_k^{(H)})\} = 0, \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, n).$$

Si ha, per l'autovalore $\mu_k^{(H)}$ di $G^{(H)}$:

$$\tilde{\tau}_k^{(n,\varrho)} \leq \frac{1}{\mu_k^{(H)}} \leq \tilde{\lambda}_k^{(n)}$$

ove

$$\tilde{\tau}_k^{(n,\varrho)} = \left\{ \vartheta_1^2 (G_\varrho^{(H)}) - \sum_{h=1}^{n}{}^{(k)} [\tilde{\lambda}_h^{(n)}]^{-2} \right\}^{-1/2}. \tag{13}$$

Come sistema $\{w_k^{(H)}\}$ è stato scelto un sistema di polinomi verificanti oltre che le condizioni al contorno (2), anche le proprietà di simmetria che definiscono H.

Il calcolo delle radici dell'equazione secolare (12) è stato condotto con diversi dei metodi esistenti nella letteratura sull'argomento (cfr. [8], [10]). Naturalmente, nell'esecuzione numerica dei calcoli, l'arrotondamento è stato eseguito tenendo presente che le soluzioni dell'equazione (12) devono fornire valori per eccesso degli autovalori del problema (5). Invece, nell'applicare la formula (13) si è tenuta presente l'esigenza contraria.

I calcoli sono stati eseguiti sul calcolatore IBM 7040 in dotazione al Centro di calcolo della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma.

Riportiamo, qui di sèguito, le tabelle dei valori per eccesso e per difetto degli autovalori relativi ai varii sottospazi che intervengono nella (10). Ogni tabella è contraddistinta dagli indici che determinano ciascuno degli spazi a secondo membro di (10). Si tenga presente che, come è ovvio, gli autovalori relativi al sottospazio $H_0^{(01)}(A)$ coincidono con quelli del sottospazio $H_0^{(10)}(A)$. Pertanto essi debbono considerarsi come autovalori doppi per il problema (5).

Risulta dalle tabelle seguenti che, complessivamente, sono stati approssimati 51 autovalori del problema (5). Weinstein [9] aveva, per primo, calcolato quattro autovalori. Successivamente, Aronszajn [1] ne aveva calcolati 13; di recente Bazley, Fox e Stadter [2] ne hanno calcolati 15 [(4)].

(4) Ad esempio, per quanto concerne l'autovalore λ_1 nello spazio $H_0^{(0000)}(A)$, Weinstein ha fornito le seguenti limitazioni

$$13.294 < \lambda_1 < 13.37 ;$$

Aronszajn ha ottenuto:

$$13.282 < \lambda_1 < 13.3842,$$

e Bazley, Fox, Stadter (per la piastra di lato 2):

$$80.920 < \lambda_1 < 80.934,$$

donde (riportando al lato π e arrotondando):

$$13.2916 < \lambda_1 < 13.29387.$$

Il risultato, ora riportato, del Weinstein, che è l'iniziatore di uno dei metodi più efficaci per il calcolo per difetto degli autovalori: il metodo dei problemi intermedi, è veramente ammirevole, quando si pensi che esso è stato ottenuto più di 30 anni fa, allorché non esistevano le attuali possibilità di calcolo automatico. Occorre però notare che l'arrotondamento dell'ultima cifra nel valore per difetto di λ_1 ha fatto sì che esso risulti maggiore sia del valore per eccesso ottenuto da Bazley, Fox e Stadter sia di quello ottenuto da noi (cfr. Tabella 0 0 0 0).

0000

	Difetti	Eccessi
λ_1	13.29376	13.29378
λ_2	179.4079	179.4302
λ_3	496.5530	497.0230
λ_4	977.6470	981.2483
λ_5	1577.598	1592.867
λ_6	3120.495	3243.913
λ_7	3155.419	3283.200
λ_8	4037.599	4316.295
λ_9	5853.083	6816.121
λ_{10}	6701.478	8275.717

1100

	Difetti	Eccessi
λ_1	120.2143	120.2232
λ_2	605.7927	606.9197
λ_3	1401.531	1415.658
λ_4	2111.855	2161.138
λ_5	3305.990	3505.315
λ_6	5037.204	5841.893
λ_7	5412.131	6450.891
λ_8	6200.628	7930.593

0011

	Difetti	Eccessi
λ_1	177.7193	177.7401
λ_2	976.1367	979.5864
λ_3	1569.225	1583.679
λ_4	3158.478	3281.561
λ_5	4038.186	4305.507
λ_6	5865.448	6790.268
λ_7	6774.412	8330.010
λ_8	7555.124	9930.325

1111

	Difetti	Eccessi
λ_1	601.1796	601.9822
λ_2	2119.556	2155.550
λ_3	3343.820	3490.771
λ_4	5216.166	5833.914
λ_5	6537.795	7899.692

01–10

	Difetti	Eccessi
λ_1	55.29691	55.29934
λ_2	279.1821	279.4931
λ_3	453.6452	454.9829
λ_4	891.2370	901.5105
λ_5	1167.425	1190.806
λ_6	1787.393	1874.881
λ_7	2096.180	2241.374
λ_8	2439.097	2676.824
λ_9	3107.619	3651.033
λ_{10}	3688.332	4715.155

BIBLIOGRAFIA.

[1] N. ARONSZAJN, *The Rayleigh-Ritz and the Weinstein methods for approximation of Eigenvalues,* Dept. of Math. Oklahoma Agricultural and Mechanical College Stillwater, Okla. Tech. Report I, II, III.

[2] N. W. BAZLEY, D. W. FOX e J. T. STADTER, *Upper and lower bounds for the frequencies of rectangular clamped plates,* The Johns Hopkins University-Applied Physics Laboratory, Technical Memorandum, TG–626, May 1965.

[3] G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari,* in *Atti del Convegno Internaz. sulle Equaz. alle deriv. parz., Trieste 1954,* Ed. Cremonese, Roma 1955.

[4] G. FICHERA, *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali,* Corsi Ist. Naz. Alta Mat., 1958, Ed. Veschi, Roma.

[5] G. FICHERA, *Sul calcolo degli autovalori,* in *Atti del Simp. Internaz. sulle Appl. dell'Analisi alla Fisica Matematica* (*Cagliari–Sassari, 1964*) Ed. Cremonese, Roma 1965.

[6] G. FICHERA, *Approximation and Estimates for Eigenvalues,* Proc. of the Symp. on the Numerical Solution of PDE, Univ. of Maryland (Maggio, 1965). Academic Press, New York and London 1966.

[7] G. FICHERA, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems,* Lecture Notes in Mathematics, Springer–Verlag, Berlino 1965, N° 8.

[8] L. FOX, *An Introduction to Numerical Linear Algebra,* Clarendon Univ. Press, Oxford 1964.

[9] A. WEINSTEIN, *Etudes des spectres des équations aux dérivées partielles,* Mémorial des Sciences Math. N° 88, 1937.

[10] J. H. WILKINSON, *The Algebraic Eigenvalue Problem,* Clarendon Univ. Press, Oxford 1965.