
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIANNANTONIO PEZZOLI

Meccanica non lineare delle onde di traslazione nei canali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 40 (1966), n.4, p. 568–576.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_4_568_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Idrodinamica. — *Meccanica non lineare delle onde di traslazione nei canali.* Nota di GIANNANTONIO PEZZOLI, presentata (*) dal Corrisp. G. SUPINO.

SUMMARY. — In this work, the study of waves in channels, taking into account the resistences, using non linear mechanics methods, has been dealt with.

As a matter of fact, from the origin of the problem, from Boussinesq, De Saint Venant etc. to Bonvicini, Puppini, Massé, Lamoén, Supino, who have brought the most recent and remarkable contributions to the question, the results they attained have been drawn by means of the waves linearized theory.

Only Supino has faced, by method of successive approximations, the non-linear questions connected with the unsteady flow problem, thus reaching interesting results.

However by adopting modern processes of non-linear mechanics, the author thinks that he has succeeded in showing new essential characteristics of the flow which is studied, especially the possibility of the wave amplification in the case of limited shocks, even before reaching the critical limit represented by the Froude number $F = 4$ ($F = u^2/gy$).

1. Lo studio delle onde di regime nei canali, viene di regola effettuato linearizzando le equazioni dell'idraulica, del moto e di continuità, ed esaminando quindi il comportamento di piccole perturbazioni sovrapposte ad un moto base uniforme di assegnate caratteristiche.

Le conclusioni a cui si arriva procedendo in questo modo sono ben conosciute e riportate in una numerosa serie di noti lavori, da quelli di Boussinesq fino alle memorie ben note di Puppini, Bonvicini, Massé, ecc.; in questo indirizzo, l'ultima e più completa ricerca è stata dedicata da G. Supino [1] ad un riesame critico del caso lineare, situazione in cui si trascurano, nelle equazioni in istudio, tutti i termini non lineari, considerati piccoli di ordine superiore.

I risultati ottenuti consistono essenzialmente nel calcolo della velocità di propagazione dell'onda, della sua attenuazione, nonché nell'individuazione di un particolare stato di corrente veloce, messo in luce per la prima volta dal Bonvicini, in cui l'onda avente celerità maggiore si esalta anziché attenuarsi.

G. Supino ha esteso l'indagine [2] all'equazione dell'idraulica conservando i termini non lineari di ordine di piccolezza immediatamente superiore a quelli lineari e trascurando gli altri, ottenendo ulteriori risultati e chiarendo nuove interessanti proprietà per le onde in esame.

Tuttavia con i metodi tradizionali, basati in genere su sviluppi in serie o successioni di funzioni, è estremamente difficoltoso studiare le proprietà di un sistema non lineare; in ispecie, nel caso in esame, il punto ancora controverso relativo alla possibile esaltazione di un'onda di regime.

(*) Nella seduta del 12 marzo 1966,

In effetti lo stesso Autore aveva mostrato [3] in una passata ricerca, che effettuando la linearizzazione dell'equazione del moto in modo diverso, secondo un procedimento segnalato da Lamoén [4], non si trova esaltazione per alcun tipo di onda; lo scrivente ha però fatto notare [5] che il procedimento di Lamoén va usato con opportune cautele, potendo portare in alcuni casi a risultati dubbi.

Al fine di chiarire maggiormente la questione, ho pensato di applicare alle equazioni idrauliche i moderni metodi della meccanica non lineare, ed in particolare una opportuna estensione alle equazioni alle derivate parziali dell'ormai classico metodo di Kryloff e Bogoliuboff [6], [7].

2. Le due equazioni idrauliche del moto variabile con il tempo e di continuità in alveo rettangolare molto largo, possono essere scritte come segue

$$(1) \quad \begin{cases} Y^3 \left(i_f - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = \frac{Q|Q|}{\chi^2} + \frac{QY}{g} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{g} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{Y^2}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{QY}{g} \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Si intende che Y rappresenta la quota del pelo libero, i_f la pendenza del fondo, Q la portata per unità di larghezza d'alveo e χ il coefficiente di resistenza di Chézy che qui si riterrà costante; in effetti il tener conto della sua variabilità, porterebbe, come ha mostrato il Supino, solo a modifiche nel valore di alcune costanti. Le altre grandezze x, t, g indicano rispettivamente l'ascissa contata positivamente nel verso monte valle, il tempo e l'accelerazione di gravità.

Posto ora, come al solito

$$(2) \quad \begin{cases} Y = y_0 + y \\ Q = q_0 + q \end{cases}$$

riferendoci cioè ad un moto base uniforme, in cui la U_0 è diretta nel senso delle x positive, la seconda delle (1) diventa

$$(3) \quad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

e quindi si può ancora porre:

$$(4) \quad \begin{cases} y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ q = - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases}$$

con che l'equazione di continuità è soddisfatta.

Introdotte ora le (4) nella prima delle (1), con

$$(5) \quad F = \frac{q_0^2}{g y_0^3}$$

ed essendo:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= (1 - F) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2q_0}{gy_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{gy_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ R &= -\frac{3if}{y_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2if}{q_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{3}{y_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2q_0}{gy_0^3} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \\ &\quad + \frac{2}{gy_0^3} \left(y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{2}{gy_0^3} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ S &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left[\frac{3}{y_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{y_0^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 - \frac{1}{gy_0^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{2}{gy_0^3} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{gy_0^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \\ &\quad - \frac{3if}{y_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{if}{y_0^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 + \frac{if}{q_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

l'equazione del moto si riduce a

$$(7) \quad P + R + S = 0.$$

Si deve osservare a questo punto che nella prima delle (1), per porre, come si fa di consueto, il termine delle resistenze proporzionale a Q^2 , anziché a $Q|Q|$ come avviene in generale, occorre che Q sia positiva, vale a dire che deve essere sempre:

$$(8) \quad |q| \leq q_0.$$

Ma dal risultato dell'approssimazione di ordine zero relativo allo studio della parte principale dell'equazione (7) (equazione di Boussinesq)

$$(7') \quad P = 0$$

si sa notoriamente che se l'oscillazione di quota per un'onda periodica semplice è

$$(9) \quad y = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

l'oscillazione corrispondente di portata risulta:

$$(10) \quad q = ac \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

essendo a la semiampiezza dell'onda, ω e c rispettivamente la sua pulsazione e la velocità di propagazione.

Dalle (8) e (10), dato che $\sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$ può diventare al massimo 1 in modulo, otteniamo:

$$(11) \quad \left| \frac{ac}{q_0} \right| \leq 1$$

ed in questa, sostituendo al posto di c il valore

$$(12) \quad c = U_0 \pm \sqrt{g y_0} \quad (U_0 y_0 = q_0)$$

scrivendo $A = 2a$ ed $F = \frac{U_0^2}{g y_0}$ si giunge al risultato:

$$(13) \quad \frac{A}{y_0} \leq 2 \left| \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{F} \pm 1} \right|^{(1)}$$

che costituisce (affinché sia valida la scrittura consueta del termine delle resistenze), una limitazione per l'ampiezza totale dell'onda, unita naturalmente a quelle già note e assegnate in altro lavoro [8].

Nel caso che la (13) non sia soddisfatta, cosa che avviene ad esempio quando l'alveo è a fondo orizzontale, bisogna partire direttamente dalle (1) come sarà mostrato in altra Nota, essendo in questo caso nulla q_0 e di conseguenza F .

Riprendiamo ora l'equazione (7) scritta nel seguente modo:

$$(7'') \quad P = -(R + S);$$

seguendo le linee del già citato metodo di Kryloff-Bogoliuboff cerchiamo una soluzione di prima approssimazione della (7'') considerando che il termine $R + S$ non è uguale a zero, ma si mantiene sempre abbastanza piccolo. La soluzione ricercata si riferirà quindi a onde per le quali la velocità di propagazione è prossima alla (12).

Se $R + S$ forse uguale a zero, la (7'') si ridurrebbe alla (7'), e una sua soluzione periodica di regime sarebbe data da

$$(14) \quad \varphi = \varphi_0 \sin \frac{\omega}{c} (x - ct + \psi)$$

con i valori (12) di c , e φ_0 e ψ costanti arbitrarie.

Essendo $R + S \neq 0$ ma abbastanza piccolo, cerchiamo una soluzione della (7'') del tipo (14), considerando ora φ_0 e ψ variabili con la sola x ⁽²⁾.

Imponiamo ancora che, posto

$$(15) \quad \frac{\omega}{c} (x - ct + \psi) = \vartheta$$

sia anche

$$(16) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_0 \frac{\omega}{c} \cos \vartheta, \quad (y = a \cos \vartheta).$$

Sarà inoltre

$$(17) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \varphi_0 \cos \vartheta.$$

(1) Il doppio segno si riferisce ovviamente alle due possibili onde e quindi la $\sqrt{F}$ va presa nella sua determinazione positiva.

(2) Questa posizione è sufficiente, in quanto nell'approssimazione di ordine zero, la x e la t sono legate linearmente nella unica variabile $x - ct$.

Con le posizioni e le ipotesi fatte si ritengono piccole tutte le grandezze comprese nei termini R ed S , rispetto alle quantità contenute in P .

Il metodo originario comporterebbe, nel secondo membro della (7'') che costituisce la quantità di « disturbo » comprendente gli eventuali termini non lineari, la presenza di funzioni della sola φ e delle sue derivate prime; nell'estensione qui fatta compaiono, nel termine $R + S$, anche derivate seconde di φ , sempre però moltiplicate per funzioni delle sue derivate prime in modo tale da garantire la necessaria piccolezza dei termini non lineari e da non togliere nulla alla validità del metodo.

D'altra parte, l'espressione di $\partial\varphi/\partial x$ dovrà essere data, derivando la (14), da:

$$(18) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi_0}{dx} \sin \vartheta + \frac{\omega}{c} \varphi_0 \left(1 + \frac{d\psi}{dx}\right) \cos \vartheta$$

che eguagliata alla (16) fornisce la prima condizione per l'integrazione della equazione non lineare assegnata:

$$(19) \quad \frac{d\varphi_0}{dx} \sin \vartheta + \frac{\omega}{c} \varphi_0 \frac{d\psi}{dx} \cos \vartheta = 0.$$

Dalle (16) e (17) si ottengono quindi le derivate seconde

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d\varphi_0}{dx} \frac{\omega}{c} \cos \vartheta - \varphi_0 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{d\psi}{dx}\right) \sin \vartheta \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2 \varphi_0 \sin \vartheta \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = \varphi_0 \frac{\omega^2}{c} \sin \vartheta \left(1 + \frac{d\psi}{dx}\right) - \omega \frac{d\varphi_0}{dx} \cos \vartheta. \end{array} \right.$$

Effettuando ora sulla (7'') le sostituzioni con le espressioni trovate e scrivendo

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = U_0 + c_0 \\ \frac{U_0}{c_0} = \sqrt{F} \end{array} \right. \quad (\text{con } c_0 = \pm \sqrt{g\gamma_0})$$

attribuendo quindi a $\sqrt{F}$ il segno positivo per individuare le onde a celerità maggiore (onde veloci) e il segno negativo per caratterizzare le onde meno veloci (onde lente), risulta immediatamente:

$$(22) \quad \frac{d\varphi_0}{dx} \cos \vartheta - \frac{\omega}{c} \varphi_0 \frac{d\psi}{dx} \sin \vartheta = - \frac{c}{\omega (1 + 2\sqrt{F} + F)} (R + S).$$

La quantità $R + S$ sarà anch'essa naturalmente calcolata con i valori di φ e delle sue derivate dati dalle (14) (16) e (20). Trattandosi però di una quantità piccola del primo ordine, sarà sufficiente al nostro calcolo (approssimazione alla Kryloff-Bogoliuboff del 1° ordine), sostituire nelle derivate seconde solo

le parti principali delle espressioni (20), vale a dire

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \simeq -\varphi_0 \frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\varphi_0 \omega^2 \sin \vartheta \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \simeq \varphi_0 \frac{\omega^2}{c} \sin \vartheta \end{cases}$$

non tenendo cioè conto in essa dei termini piccoli di 2° ordine introdotti dalla considerazione della variabilità con x di φ_0 e ψ .

Moltiplicando ora la (19) per $\sin \vartheta$ e la (22) per $\cos \vartheta$ e sommando, invertendo i prodotti e sottraendo, si ottengono subito le espressioni

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_0}{dx} = -\frac{c}{\omega(1+2\sqrt{F}+F)} (R+S) \cos \vartheta \\ \frac{d\psi}{dx} = \frac{c^2}{\varphi_0 \omega^2 (1+2\sqrt{F}+F)} (R+S) \sin \vartheta. \end{cases}$$

Seguendo sempre il procedimento classico della meccanica non lineare fin qui utilizzata, mediamo i secondi termini in un periodo, ritenendo in esso costanti φ_0 e ψ ; si ottengono così le formule risolutive:

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_0}{dx} = -\frac{c}{2\pi\omega(1+2\sqrt{F}+F)} \int_0^{2\pi} (R+S) \cos \vartheta d\vartheta \\ \frac{d\psi}{dx} = \frac{c^2}{2\pi\varphi_0 \omega^2 (1+2\sqrt{F}+F)} \int_0^{2\pi} (R+S) \sin \vartheta d\vartheta. \end{cases}$$

La valutazione degli integrali che compaiono nelle (25) non offre alcuna difficoltà essendo gli integrandi costituiti da funzioni del tipo $\sin^n \vartheta \cos^m \vartheta$, per cui, a conti fatti, le (25) divengono:

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_0}{dx} = -\frac{if\varphi_0}{(1+2\sqrt{F}+F)y_0} \left(\frac{1}{\sqrt{F}} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \frac{\omega^2}{c^2 y_0^2} \varphi_0^2 \right) \\ \frac{d\psi}{dx} = -\frac{3}{8} \frac{\varphi_0^2 \omega^2}{c^2 y_0^2 (1+2\sqrt{F}+F)}. \end{cases}$$

Eseguendo il calcolo che conduce alle (26) si nota anzitutto che nella prima di queste, tra parentesi tonda nel secondo membro, compaiono due termini provenienti dai primi due di R , (6) (cosa che equivale all'approssimazione lineare dell'equazione del moto); dà inoltre un contributo (terzo termine), la quantità $-\frac{if}{y_0^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3$ contenuta in S (6). Risultano perciò nell'approssimazione del primo ordine, privi di influenza tutti i termini del secondo ordine considerati da G. Supino nella sua analisi [2] che si elidono avendo in un pe-

riodo valor medio nullo, mentre non risulta invece trascurabile il termine del terzo ordine di cui non è stato tenuto conto nella [2], ma che si dimostra essere più grande di quelli conservati.

Continuando l'esame della prima delle (26) si rileva da essa una particolarità notevole, mai prima d'ora, ritengo, messa in luce da altri ricercatori e che è strettamente legata alla non linearità delle equazioni di partenza: in effetti il secondo membro di detta equazione può annullarsi per $\bar{\varphi}_0 = 0$ e per

$$(27) \quad \bar{\varphi}_0 = 2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{cy_0}{\omega}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{F}} - \frac{1}{2}};$$

la determinazione negativa della radice va scartata perché priva di senso fisico.

Come è noto, l'esistenza di due valori di φ_0 che annullano $d\varphi/dx$, mostra la presenza, nel piano $(\varphi, d\varphi/dx)$ di un punto singolare nell'origine e di un ciclo limite con raggio dato dalla (27).

Ma confrontando la 1^a delle (4) e la (16), indicata con a la semiampiezza dell'onda, otterremo la $\bar{a}$ che caratterizza il ciclo limite per le sopraelevazioni; ne risulta subito:

$$(28) \quad \bar{\varphi}_0 = \frac{\bar{a}c}{\omega}$$

e dalla (27)

$$(29) \quad \bar{a} = y_0 \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{F}} - \frac{1}{2}}.$$

La (27) e quindi la (29) hanno senso solo per $0 < F < 4$ e per la determinazione positiva della $\sqrt{F}$ (onda veloce); per ogni valore di $\varphi_0 < \bar{\varphi}_0$ si può notare che $d\varphi_0/dx$ resta sempre positiva, mentre diviene certamente negativa per $\varphi_0 > \bar{\varphi}_0$.

La topologia del ciclo limite indica pertanto che si tratta di un ciclo essenzialmente instabile sia internamente che esternamente; di conseguenza la (29) mostra che per ogni valore di a inferiore ad $\bar{a}$ l'onda assegnata si attenua, in quanto nel piano $(\varphi, d\varphi/dx)$ le traiettorie tendono alla singolarità nell'origine degli assi che è un fuoco stabile, mentre per valori di a maggiori di $\bar{a}$, le traiettorie, svolgendosi dal ciclo limite all'infinito, indicano che l'onda in ogni caso si esalta.

Solo per $F = 4$, $\bar{a}$ tende a zero, mostrando così che il limite finora determinato per l'esaltazione di un'onda veloce, costituisce solamente il limite per cui si esaltano le perturbazioni infinitesime.

Gli shock finiti che rispettano la (29), consentono la creazione di onde che si esaltano pur restando al disotto del limite $F = 4$.

L'integrazione diretta della 1^a delle (26) è immediata, essendo le variabili separabili, e l'equazione stessa è formalmente identica a quella di Van der Pool [6] che fornisce il valore della tensione di griglia di un triodo oscillante. Il segno del secondo membro è contrario a quello dell'equazione sopra

citata, e ciò mostra che il ciclo limite anziché essere totalmente stabile è qui totalmente instabile.

Nel caso dell'oscillatore a triodo anzidetto ciò equivale ad invertire il senso di uno degli avvolgimenti del trasformatore (o scambiare fra di loro i morsetti del segnale di ingresso), ed in questo modo è possibile stabilire una «quasi» analogia [9] fra il circuito descritto e il fenomeno di moto ondoso studiato.

Questo vale naturalmente quando $F \leq 4$, dato che per $F > 4$ il ciclo limite non esiste più (in quanto avrebbe raggio immaginario), perciò l'integrazione fornisce, prendendo il segno positivo per $F < 4$ e il negativo per $F > 4$:

$$(30) \quad \varphi_0 = \frac{\varphi_0^* e^{-\lambda x}}{\sqrt{1 \pm \frac{3}{8} \frac{\omega^2 \varphi_0^{*2}}{c^2 y_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{F}} - \frac{1}{2} \right)} (e^{-2\lambda x} - 1)}}$$

con φ_0^* valore di φ_0 per $x = 0$, e

$$(31) \quad \lambda = \frac{i_f}{y_0} \frac{\frac{1}{\sqrt{F}} - \frac{1}{2}}{1 + 2\sqrt{F} + F}.$$

Da cui ricordando il legame fra φ e y , detta a_0 la semiampiezza iniziale dell'onda, si ha

$$(32) \quad y = \frac{a_0 e^{-\lambda x}}{\sqrt{1 \pm \frac{3}{8} \frac{a_0^2}{y_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{F}} - \frac{1}{2} \right)} (e^{-2\lambda x} - 1)}} \cos \frac{\omega}{c} (x - ct + \psi)$$

e di conseguenza

$$(33) \quad q = -cy.$$

Essendo ψ dato in forma differenziale dalla 2ª delle (26), noto ora φ_0 , e integrando, posta la fase iniziale $\psi(0) = 0$, ne risulta facilmente:

$$(34) \quad \psi = \pm \frac{y_0}{2i_f} \ln \left[\pm \frac{3}{8} \frac{a_0^2}{y_0^2} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{F}} - \frac{1}{2}} (e^{-2\lambda x} - 1) + 1 \right].$$

È ovvio che se l'onda è di piccola ampiezza iniziale, ψ è nullo e $\frac{a_0}{y_0} \rightarrow 0$, per cui la (32) si riduce alla forma consueta di onda attenuata (o esaltata) esponenzialmente

$$(32') \quad y = a_0 e^{-\lambda x} \cos \frac{\omega}{c} (x - ct)$$

e dall'esame di λ , (31), si ottengono tutti i consueti risultati relativi alle onde linearizzate nella maniera corrente.

Se l'ampiezza iniziale non è trascurabile, la linearizzazione non è più lecita; si incontrano i nuovi fatti già esaminati e si mostra che l'onda veloce può esaltarsi anche se non si raggiunge il limite $F = 4$; anzi, il calcolo così eseguito, deve, allo stato attuale delle cose, ritenersi una dimostrazione della possibilità di esaltazione di un'onda nell'ambito dello schema fatto. Per onde molto lunghe (onde di piena), una dimostrazione è stata data da E. Marchi [8].

Tale esaltazione è quindi da attribuirsi ad una interazione energetica fra onda e corrente con scambio di energia che avviene dalla prima alla seconda all'interno del ciclo limite e viceversa all'esterno.

Per ultimo si fa osservare che per ampiezze finite la velocità dell'onda e quindi la sua frequenza non sono più costanti, e le correzioni vengono fornite dal calcolo della ψ .

Si ha quindi, a seconda dei casi, un allontanamento od un avvicinamento delle creste (e dei cavi) e quindi, o una progressiva tendenza a ristabilire un moto permanente o una formazione di pacchetti di onde sempre più stretti; questo naturalmente fino a che non intervengano fatti che pongano le quantità in gioco al di fuori degli ordini di grandezza stabiliti per la validità delle equazioni.

Non si insiste sul fatto che anche con questa soluzione, in accordo con le conclusioni tratte da G. Supino, il livello medio dell'onda non coincide ovviamente col livello di moto uniforme.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. SUPINO, *Le onde di traslazione nei canali – La equazione linearizzata*. Note I e II, « Rend. Acc. Lincei », Nov.–Dic. (1960).
- [2] G. SUPINO, *Sopra le onde di traslazione nei canali – Il caso non lineare*, « Rend. Acc. Lincei », Febbraio (1961).
- [3] G. SUPINO, *La propagazione delle onde nei canali*, « L'Energia elettrica », n. 4 (1950).
- [4] J. LAMOEN, *Sur l'hydraulique des fleuves a maree*, « Revue generale de l'hydraulique », n. 10, 11, 12 (1936).
- [5] G. PEZZOLI, *L'attenuazione delle onde negli alvei a fondo orizzontale*, in *Atti del VI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Padova, maggio 1959.
- [6] N. W. McLACHLAN, *Ordinary non linear differential equations*. Oxford, Clarendon Press.
- [7] N. MINORSKY, *Introduction to non linear mechanics*. J. W. Edwards.
- [8] E. MARCHI, *Le onde di regime a lungo periodo*, « L'Energia Elettrica », n. 8 (1956).
- [9] G. SUPINO, *Su l'analisi dimensionale e la teoria dei modelli*, 2 note nei « Rend. Acc. Lincei », 1° semestre (1947).