
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIUSEPPE EVANGELISTI

Sulla soluzione numerica delle equazioni della propagazione col metodo delle caratteristiche. Nota II

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 40 (1966), n.4, p. 531–539.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_4_531_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sulla soluzione numerica delle equazioni della propagazione col metodo delle caratteristiche.* Nota II (*) del Corrisp. GIUSEPPE EVANGELISTI.

SUMMARY. — The study regards the application of the method of characteristics to the numerical solution of one-dimensional problems of propagation. A new type of grid of characteristics is used, which inserts a Massau grid into a rectangular mesh with the sides parallel to the axes of the space-time plane.

9. Il seguito della Nota I — che porta lo stesso titolo della presente, e di cui si conservano le notazioni e la numerazione dei paragrafi, delle formule e delle figure — considera il caso generale che gli elementi della matrice (2) del sistema a derivate parziali (1) del fenomeno propagatorio siano funzioni sia delle variabili indipendenti x, y sia delle variabili dipendenti u, v . Vengono con ciò a cadere le proprietà che sono servite di base per la trattazione della Nota I: la condizione (8) di propagazione isotropica non è soddisfatta; perde significato il tempo di transito (9); il calcolo numerico non è più frazionabile in due fasi successive e indipendenti.

È chiaro che in siffatte condizioni il forzamento dei reticoli di Massau entro una maglia rettangolare va eseguito passo-passo. Sarà utilizzato allo scopo — sia pure in modo diverso, e sopra una struttura diversa — un brillante artificio suggerito recentemente da D. R. Hartree (5). Dato, appunto, il carattere passo-passo dell'operazione, tanto vale eseguire il forzamento in un reticolo uniforme, di cui si indicano rispettivamente con Δx e Δt gli intervalli di scansione delle ascisse e delle ordinate. Deve restare ferma la condizione che Δx sia un sottomultiplo pari della lunghezza L del mezzo in cui ha sede la propagazione.

10. Il forzamento passo-passo, di cui si è parlato or ora, rende necessarie interpolazioni sia lungo le caratteristiche sia lungo le orizzontali. La logica stessa della procedura indica un'interpolazione lineare per il primo caso (in cui si segue l'onda, e si tratta soltanto di metterne in conto le alterazioni dovute all'avanzamento nel mezzo) e un'interpolazione più raffinata nel secondo caso (dove ci si sposta lungo l'onda). Diversi elementi, destinati ad apparire chiaramente nel seguito, indicano la maggior raffinatezza del secondo caso in un'interpolazione del 3° ordine. Per evitare inutili ingombri, le relative for-

(*) Presentata nella seduta del 12 marzo 1966.

(5) Si vedano, in proposito, l'articolo di M. LISTER, *The numerical solution of hyperbolic partial differential equations by the method of characteristics*, nel trattato: A. RALSTON e H. S. WILF, *Mathematical methods for digital computers*, Wiley, New York 1960, e il testo: *Numerical solution of ordinary and partial differential equations*, edito da L. FOX, Pergamon Press, New York 1962.

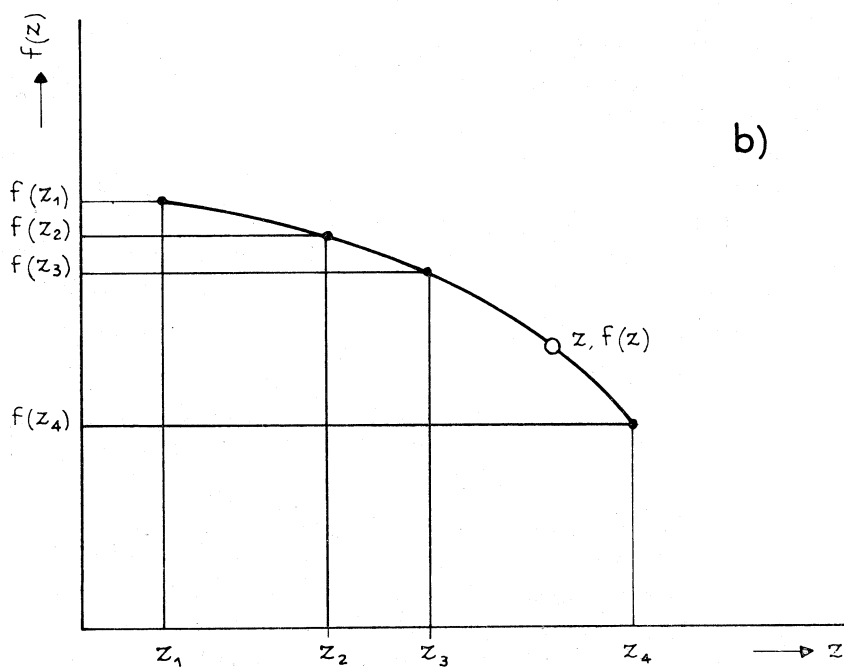
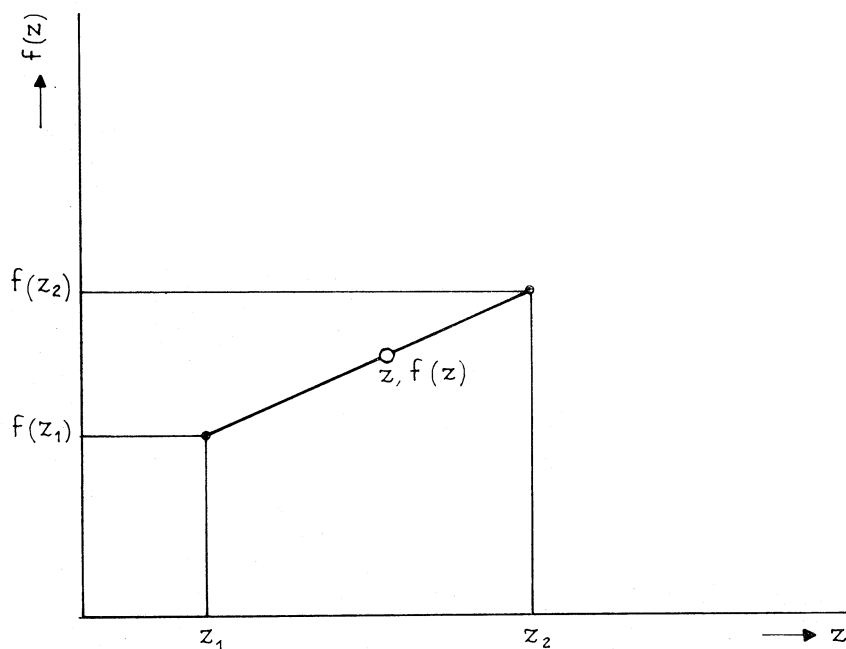


Fig. 6.

mule vengono fornite qui sotto, una volta per tutte. La grandezza da interpolare viene indicata genericamente, come una funzione $f(z)$ della variabile z , con l'intesa che all'una e all'altra saranno attribuiti, caso per caso, i significati di loro spettanza.

L'interpolazione (o estrapolazione) lineare non avrebbe certo bisogno di essere richiamata, ma lo si fa egualmente, per amore di completezza: come indica la fig. 6-a), il valore $f(z)$ in z viene dedotto dai valori $f(z_1)$ e $f(z_2)$ in due punti (comunque collocati rispetto a z) per mezzo della formula

$$(15) \quad f(z) = f(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \{f(z_2) - f(z_1)\}.$$

Per l'interpolazione cubica, rappresenta in fig. 6-b), si hanno i quattro valori della variabile indipendente

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad z_4$$

che si succedono in modo qualunque, e il valore di $f(z)$ (anche qui, ovunque cada z) si deduce dal polinomio di 3° grado che passa per i quattro punti

$$f(z_1), \quad f(z_2), \quad f(z_3), \quad f(z_4).$$

Un siffatto polinomio è notoriamente unico, ma può essere dato in diversi modi. Qui viene adottata l'antica, ma ancor vivissima, procedura di Newton, che è chiara e facilmente adattabile al calcolo automatico ⁽⁶⁾. Il polinomio interpolatore viene fornito per mezzo delle sue differenze secondo il quadro

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(z_1) \\ f(z_2) \\ f(z_3) \\ f(z_4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} f[z_1, z_2] \\ f[z_2, z_3] \\ f[z_3, z_4] \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} f[z_1, z_2, z_3] \\ f[z_2, z_3, z_4] \end{array} \searrow f[z_1, z_2, z_3, z_4]$$

I simboli che vi compaiono nelle colonne successive alla prima hanno il significato riportato qui sotto:

$$f[z_1, z_2] = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1}$$

e così di seguito;

$$\begin{aligned} f[z_1, z_2, z_3] &= \frac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1} = \\ &= \frac{f(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} + \frac{f(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} + \frac{f(z_3)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} \end{aligned}$$

e così di seguito;

$$\begin{aligned} f[z_1, z_2, z_3, z_4] &= \frac{f[z_2, z_3, z_4] - f[z_1, z_2, z_3]}{z_4 - z_1} = \\ &= \frac{f(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} + \frac{f(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} + \\ &+ \frac{f(z_3)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} + \frac{f(z_4)}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)}. \end{aligned}$$

(6) Il metodo generale dell'interpolazione per differenze successive trova ampio sviluppo nel testo di F. B. HILDEBRAND, *Introduction to numerical analysis*, McGraw-Hill, New York 1956.

Costruito che sia il quadro (16), il valore di $f(z)$ è dato dalla formula

$$(17) \quad f(z) = f(z_1) + (z - z_1)f[z_1, z_2] + (z - z_1)(z - z_2)f[z_1, z_2, z_3] + \\ + (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)f[z_1, z_2, z_3, z_4].$$

II. Il calcolo delle incognite u, v viene impostato, da cima a fondo, sul classico metodo iterativo detto di predizione-correzione. Per ciascun passo, il processo viene arrestato alla prima iterazione: determinato con un semplice calcolo «in avanti» il valore di predizione (che sarà contraddistinto da una sovralineatura) e ricavandone il valore corretto (che verrà lasciato senza alcun contrassegno), quest'ultimo è assunto come definitivo. Secondo la propria esperienza, lo scrivente sconsiglia, come troppo grossolana, la predizione semplice e non ritiene necessario, in generale, spingersi oltre la prima correzione (pur restando sempre aperta la possibilità di eseguire tante iterazioni quante si vogliono).

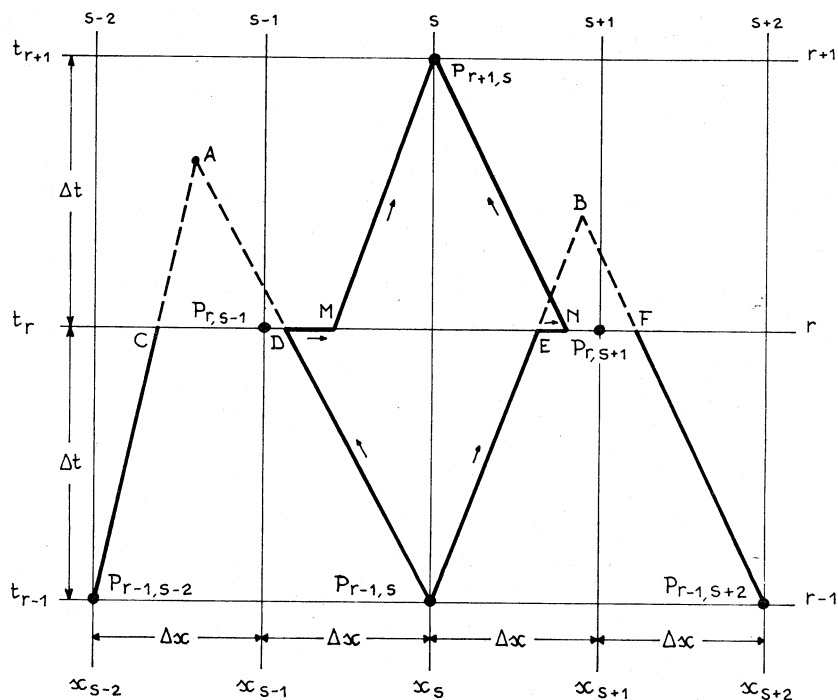


Fig. 7.

Il processo di calcolo adottato si segue nella fig. 7, che considera, come la fig. 3, le tre orizzontali successive $r-1, r, r+1$ (con r dispari). L'attenzione è fissata sul punto perno $P_{r+1,s}$, dove si tratta di calcolare la coppia d'incognite $u_{r+1,s}, v_{r+1,s}$. La prima fase del calcolo è l'uscita, dai tre punti $P_{r-1,s-2}, P_{r-1,s}, P_{r-1,s+2}$ dell'orizzontale pari ($r-1$), di due maglie di un reticolo di Mas-

sau; ne restano determinati i due punti d'arrivo A e B. Al solito, il reticolo è costruito in base all'ipotesi che i tronchi di caratteristica possano confondersi con un segmento di retta. Si fornisce qui sotto il calcolo del punto A, rilevando che per il punto B le cose vanno allo stesso modo, salvo un aumento di due unità nel pedice di colonna (cioè uno spostamento verso destra di due intervalli Δx). Il punto di predizione $\bar{A}$, le cui coordinate si indicano con $x_{\bar{A}}, t_{\bar{A}}$, è l'intersezione fra la retta d'inclinazione $\lambda_{r-1,s-2}$, uscente da $P_{r-1,s-2}$, e quella d'inclinazione $\mu_{r-1,s}$ uscente da $P_{r-1,s}$: le due coordinate sono quindi soluzione del sistema lineare

$$(18) \quad \begin{cases} t_{\bar{A}} - t_{r-1} = \lambda_{r-1,s-2} (x_{\bar{A}} - x_{s-2}) \\ t_{\bar{A}} - t_{r-1} = \mu_{r-1,s} (x_{\bar{A}} - x_s) \end{cases}$$

Le incognite $u_{\bar{A}}, v_{\bar{A}}$ in $\bar{A}$ sono determinate dal sistema, lineare algebrico, delle due equazioni di compatibilità (6)–(7) (previa la trasformazione in equazioni a differenze finite di cui si è fatto parola nel n. 8).

$$(19) \quad \begin{cases} A_{r-1,s-2}^{(\lambda)} (u_{\bar{A}} - u_{r-1,s-2}) + B_{r-1,s-2}^{(\lambda)} (v_{\bar{A}} - v_{r-1,s-2}) + C_{r-1,s-2}^{(\lambda)} (x_{\bar{A}} - x_{s-2}) = 0 \\ A_{r-1,s}^{(\mu)} (u_{\bar{A}} - u_{r-1,s}) + B_{r-1,s}^{(\mu)} (v_{\bar{A}} - v_{r-1,s}) + C_{r-1,s}^{(\mu)} (x_{\bar{A}} - x_s) = 0 \end{cases}$$

Calcolate, a mezzo delle (3) e (4), le direzioni caratteristiche $\lambda_{\bar{A}}, \mu_{\bar{A}}$ in $\bar{A}$, vi è quanto occorre per passare dal punto di predizione $\bar{A}$ al punto di correzione A segnato in figura. Le coordinate x_A, t_A di A risolvono il sistema, analogo a (18),

$$(20) \quad \begin{cases} t_A - t_{r-1} = \frac{1}{2} \{ \lambda_{r-1,s-2} + \lambda_{\bar{A}} \} \{ x_A - x_{s-2} \} \\ t_A - t_{r-1} = \frac{1}{2} \{ \mu_{r-1,s} + \mu_{\bar{A}} \} \{ x_A - x_s \} \end{cases}$$

I valori corretti u_A, v_A delle incognite sono forniti dal sistema

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \{ A_{r-1,s-2}^{(\lambda)} + A_{\bar{A}}^{(\lambda)} \} (u_A - u_{r-1,s-2}) + \\ + \frac{1}{2} \{ B_{r-1,s-2}^{(\lambda)} + B_{\bar{A}}^{(\lambda)} \} (v_A - v_{r-1,s-2}) + \\ + \frac{1}{2} \{ C_{r-1,s-2}^{(\lambda)} + C_{\bar{A}}^{(\lambda)} \} (x_A - x_{s-2}) = 0 \\ \frac{1}{2} \{ A_{r-1,s}^{(\mu)} + A_{\bar{A}}^{(\mu)} \} (u_A - u_{r-1,s}) + \\ + \frac{1}{2} \{ B_{r-1,s}^{(\mu)} + B_{\bar{A}}^{(\mu)} \} (v_A - v_{r-1,s}) + \\ + \frac{1}{2} \{ C_{r-1,s}^{(\mu)} + C_{\bar{A}}^{(\mu)} \} (x_A - x_s) = 0 \end{cases}$$

Infine, le direzioni caratteristiche in A, λ_A e μ_A si ricavano dalle solite (3) e (4) in base alla quadrupla $x_A, t_A; u_A, v_A$.

Inizia ora, sulla riga dispari r , l'operazione di aggiustamento per raggiungere il punto perno $P_{r+1,s}$ (da cui ripartiranno le direzioni caratteristiche di un nuovo reticolo di Massau da aggiustare, a sua volta, sulla riga $r+2$).

Poiché in generale il punto A non coincide con un nodo del reticolo rettangolare, le caratteristiche λ e μ che lo raggiungono, rispettivamente provenienti da $P_{r-1,s-2}$ e da $P_{r-1,s}$, incontrano l'orizzontale r nei punti C, D, della fig. 7.

Le ascisse x di questi punti, e i valori che vi prendono le grandezze $\lambda, \mu; u, v$ vengono contrassegnati dai pedici C e D; essi si determinano per interpolazione lineare fra i punti $P_{r-1,s-2}$ e A, e fra i punti $P_{r-1,s}$ e A, in coerenza con le posizioni del n. 10: si adottano perciò formule del tipo (15).

Si calcolano allo stesso modo, e si contrassegnano coi relativi pedici, le stesse grandezze nei punti E, F della stessa fig. 7 che segnano, nell'ordine, le intersezioni dell'orizzontale r con le caratteristiche λ e μ dirette verso il punto B.

Con ciò finisce la fase preliminare del calcolo e si apre un secondo processo predizione-correzione atto a raggiungere il punto perno $P_{r+1,s}$.

Si ammette in sede di predizione (ed anche questa è una posizione tipica del metodo di Hartree) che le direzioni caratteristiche in $P_{r+1,s}$ si confondano rispettivamente con λ_D e μ_E . Ciò permette di determinare i punti di predizione $\bar{M}$ e $\bar{N}$ dell'orizzontale r da cui devono provenire le caratteristiche (rispettivamente, λ e μ) per $P_{r+1,s}$:

$$(22) \quad \begin{cases} x_{\bar{M}} = x_s - \frac{1}{\lambda_D} \Delta t \\ x_{\bar{N}} = x_s - \frac{1}{\mu_E} \Delta t. \end{cases}$$

Per determinare le quattro grandezze λ, μ e u, v nei punti $\bar{M}$ e $\bar{N}$ occorre una nuova interpolazione; questa volta, però, lungo un'orizzontale e non lungo una caratteristica. Per una siffatta operazione, che è più delicata, si potrebbe usare l'interpolazione (o estrapolazione) lineare (15) fra i punti D, E. Ma è più sicuro, anche se più macchinoso, utilizzare tutti e quattro i punti C, D, E, F (il cui calcolo è comunque richiesto per percorrere l'orizzontale r) per un'interpolazione cubica secondo la (17).

Una volta determinate, a questo modo, le grandezze in $\bar{M}$ e $\bar{N}$, le due equazioni di compatibilità (6)-(7) forniscono i valori di predizione delle incognite u, v nel punto perno $P_{r+1,s}$:

$$(23) \quad \begin{cases} A_{\bar{M}}^{(\lambda)} (\bar{u}_{r+1,s} - u_{\bar{M}}) + B_{\bar{M}}^{(\lambda)} (\bar{v}_{r+1,s} - v_{\bar{M}}) + C_{\bar{M}}^{(\lambda)} (x_s - x_{\bar{M}}) = 0 \\ A_{\bar{N}}^{(\mu)} (\bar{u}_{r+1,s} - u_{\bar{N}}) + B_{\bar{N}}^{(\mu)} (\bar{v}_{r+1,s} - v_{\bar{N}}) + C_{\bar{N}}^{(\mu)} (x_s - x_{\bar{N}}) = 0. \end{cases}$$

Con ciò è nota la quaterna $t_{r+1}, x_s; \bar{u}_{r+1,s}, \bar{v}_{r+1,s}$, e basta applicare ancora una volta le (3) e (4) per ottenere i valori di predizione $\bar{\lambda}_{r+1,s}, \bar{\mu}_{r+1,s}$.

Si entra, finalmente, nell'ultimo stadio del passo, che è il calcolo dei valori di correzione.

I punti corretti M ed N dell'orizzontale r hanno le ascisse

$$(24) \quad \begin{cases} x_M = x_s - \left(\frac{1}{\lambda_D} + \frac{1}{\bar{\lambda}_{r+1,s}} \right) \frac{\Delta t}{2} \\ x_N = x_s - \left(\frac{1}{\mu_E} + \frac{1}{\bar{\mu}_{r+1,s}} \right) \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

e le due terme $u_M, v_M; \lambda_M$ e $u_N, v_N; \mu_N$ si calcolano come si è fatto per M e N: cioè interpolando fra i quattro punti C, D, E, F.

Un'ultima applicazione delle equazioni di compatibilità fornisce i risultati finali, cioè i valori corretti $u_{r+1,s}, v_{r+1,s}$ della coppia d'incognite in $P_{r+1,s}$:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ A_M^{(\lambda)} + \bar{A}_{r+1,s}^{(\lambda)} \} (u_{r+1,s} - u_M) + \\ & + \frac{1}{2} \{ B_M^{(\lambda)} + \bar{B}_{r+1,s}^{(\lambda)} \} (v_{r+1,s} - v_M) + \\ & + \frac{1}{2} \{ C_M^{(\lambda)} + \bar{C}_{r+1,s}^{(\lambda)} \} (x_s - x_M) = 0 \\ & \frac{1}{2} \{ A_N^{(\mu)} + \bar{A}_{r+1,s}^{(\mu)} \} (u_{r+1,s} - u_N) + \\ & + \frac{1}{2} \{ B_N^{(\mu)} + \bar{B}_{r+1,s}^{(\mu)} \} (v_{r+1,s} - v_N) + \\ & + \frac{1}{2} \{ C_N^{(\mu)} + \bar{C}_{r+1,s}^{(\mu)} \} (x_s - x_N) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si osserverà che fra i punti dell'orizzontale dispari r che partecipano al calcolo mancano proprio i punti perno $P_{r,s-1}$ e $P_{r,s+1}$. Ma essi, ove occorra, vengono calcolati, per interpolazione, anche lineare, fra i punti M, N.

12. Convieni soffermarsi un momento sul processo numerico ora descritto, in quanto esso si differenzia dalle altre applicazioni del metodo di Hartree note allo scrivente.

Viene per primo l'elemento essenziale, cioè il reticolo di caratteristiche. La fig. 8 lo riporta nella configurazione più semplice e visivamente espressiva. Si riconosce che per ogni punto perno di ogni orizzontale pari passano, tale e quale come nel caso semplificato della fig. 4, le maglie di un reticolo di Massau. È importante, riguardo alla messa in conto delle condizioni ai limiti, il fatto che ciò vale anche per i punti sulle verticali frontiera.

Si vede dalla fig. 7 che ciascuna coppia di intersezioni fra il reticolo di Massau e le orizzontali dispari prende parte al calcolo di due punti perno: la coppia C, D serve anche per $P_{r+1,s-2}$, e la coppia E, F per $P_{r+1,s+2}$. Riesce pure chiaro che se $s = 2$, i quattro punti A, B, C, D individuano anche il punto N da cui parte la caratteristica μ per il punto perno $P_{0,r+1}$ della verticale frontiera zero (e le cose stanno in modo analogo per $s = n - 2$ e la caratteristica λ nel caso della verticale n).

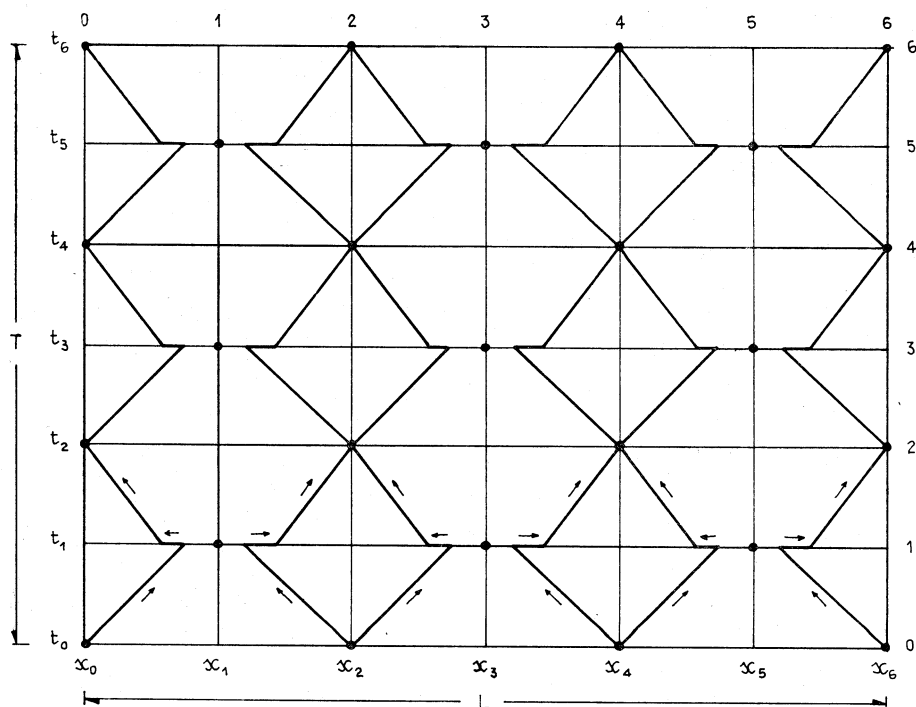


Fig. 8.

Il reticolo di fig. 8 conserva – anzi, accentua – la distinzione fra le orizzontali pari e dispari. Le prime rimangono il nerbo del calcolo; le seconde adempiono a due compiti: rompono la tratta delle caratteristiche e provvedono a inserire nel reticolo rettangolare i punti perno delle orizzontali pari. Ogni passo comporta una lunga sequenza di calcoli: ma si tratta di operazioni semplici, che arrivano, al massimo, alla soluzione di due equazioni lineari simultanee. Il procedimento adottato ha – come hanno, in misura più o meno sentita, tutti quelli basati sul metodo di Hartree – il punto debole delle interpolazioni; il rimedio è stato cercato nella precisione dell'interpolazione fra caratteristiche diverse, quale è resa possibile dalla disponibilità di quattro punti su ogni orizzontale dispari.

L'osservazione ultima, ma più importante di tutte, riguarda la stabilità del processo numerico.

Indipendentemente dal modo di attuarla, la soluzione numerica di un sistema iperbolico del tipo (1) presenta problemi di stabilità non ancora risolti in termini rigorosi. Proprio per questa circostanza la presente ricerca ha adottato, su scala così larga, il processo predizione-correzione: è allora disponibile il continuo confronto fra valori predetti e valori corretti che non dimostra nulla, ma costituisce egualmente un indizio di grande valore pratico.

Comunque, si cita una condizione necessaria, di valore dominante, che si formula e si controlla in modo molto semplice: nel reticolo di Massau appoggiato ai punti $P_{r-1,s-2}$, $P_{r-1,s}$, $P_{r-1,s+2}$ i due punti perno $P_{r,s-1}$ e $P_{r,s+1}$

devono cadere, rispettivamente, nell'interno del triangolo $P_{r-1,s-2} \cdot A \cdot P_{r-1,s}$ e del triangolo $P_{r-1,s} \cdot B \cdot P_{r-1,s+2}$. La condizione è illustrata nella fig. 9. Si deve presentare la configurazione a), quale compare nella fig. 7; vanno escluse le

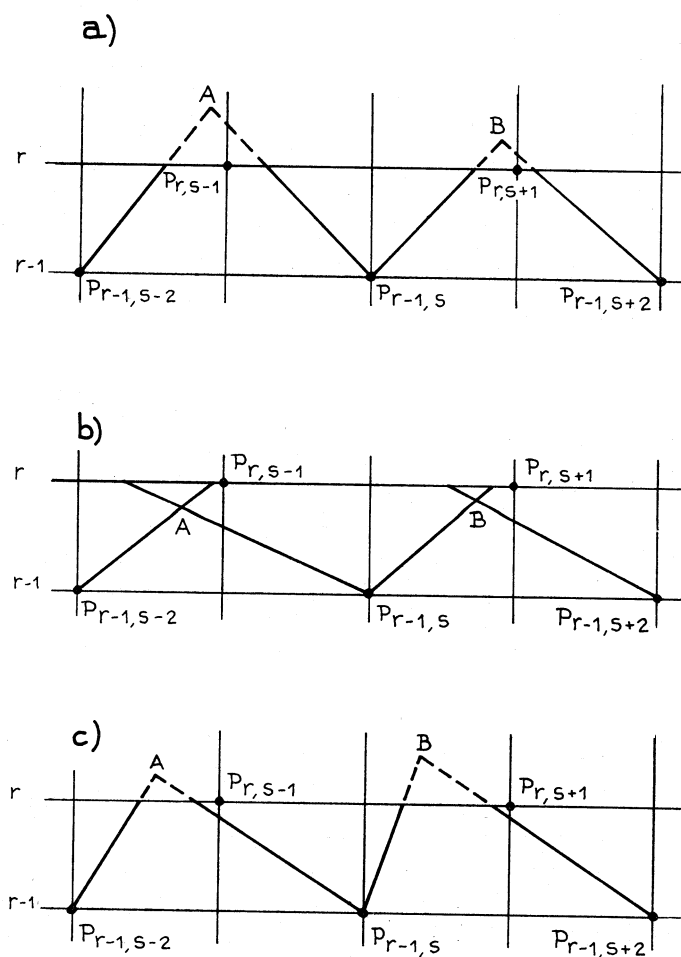


Fig. 9.

altre due possibilità, indicate sotto b) e c) ⁽⁷⁾. Il processo adottato – come, del resto, tutti gli altri fondati sullo stesso principio – può facilmente accompagnare ogni passo con la verifica di questa condizione di stabilità. Finché l'esito è positivo, è lecito proseguire con gli adottati valori di scansione Δt e Δx ; diversamente, occorre diminuire Δt (o aumentare Δx): ed anche questa è operazione facilmente adattabile al calcolo automatico.

(7) In un caso particolare, quello delle equazioni lineari a coefficienti costanti, la condizione enunciata è anche sufficiente. La relativa dimostrazione si trova nella Memoria: R. COURANT, K. O. FRIEDRICH, H. LEWY, *Ueber die partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik*, «Mathematische Annalen», 1928.