Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Sulle formule integrali di Green in Magnetoidrodinamica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.4, p. 523–530.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_4_523_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Magnetoidrodinamica. — *Sulle formule integrali di Green in Magnetoidrodinamica.* Nota [*] del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — The A. generalises the integral formulas of Green in the case of the spatial motion of a viscous incompressible fluid which is a electrical conductor, and establishes the integral equations which define the cartesian components of the velocity, the total pressure (hydrodynamic and magnetic), and the components of the magnetic field, at a point within a given dominion, which is bounded by a closed surface, variable with time, and at a given instant.

1. Le formule integrali di Green, che sono così feconde nei diversi rami della Fisica matematica, sono già state, come si sa, impiegate da tempo nell'Idrodinamica pura, e, in particolare, nello studio del movimento dei fluidi viscosi incompressibili. In effetti H. A. Lorentz aveva ottenuto dei risultati interessanti nel caso dei moti permanenti, e poi G. W. Oseen aveva dedicato un'ampia memoria nello sviluppo di una teoria generale del movimento dei fluidi viscosi, mediante l'applicazione delle formule generalizzate di Green [1].

In questa Nota vengono riassunti alcuni risultati da me ottenuti generalizzando le formule integrali di Green al caso del movimento di un fluido viscoso incompressibile elettricamente conduttore in cui si genera un campo magnetico, stabilendo delle equazioni integrali che definiscono, in un punto interno a un dominio spaziale, limitato da una superficie variabile col tempo e in un dato istante, le componenti cartesiane della velocità di una particella fluida, la pressione totale (idrodinamica e magnetica) e le componenti del campo magnetico, per mezzo dei valori delle stesse quantità all'istante iniziale in tutto il dominio, e per mezzo dei valori delle medesime e delle loro derivate prime sulla superficie limite.

Nell'ipotesi poi che il dominio occupato dal fluido si estenda a tutto lo spazio, sotto determinate condizioni per le componenti della velocità e del campo magnetico, e delle loro derivate, si deducono delle formule che consentono di risolvere il problema della determinazione della velocità e del campo magnetico in un fluido indefinito, viscoso ed elettricamente conduttore, essendo assegnata all'istante iniziale la distribuzione dei vortici e della corrente di conduzione in una regione limitata dello spazio.

(*) Presentata nella seduta del 16 aprile 1966.

(1) G. W. OSEEN, *Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'Hydrodinamique et sur quelques-unes de leurs applications.* « Acta Mathematica », *34*, pp. 205–284.

2. Trattandosi di un fluido viscoso incompressibile, elettricamente conduttore, le equazioni da considerare sono:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}}\,\boldsymbol{v} = \frac{\mu}{\rho}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \wedge \mathbf{H} - \mathrm{grad}\,\frac{p}{\rho} + \mathbf{F} + \nu\Delta_2\,\boldsymbol{v} \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,(\mathbf{H} \wedge \boldsymbol{v}) = \eta\Delta_2\,\mathbf{H} \quad , \quad \left(\eta = \frac{1}{\mu\sigma}\right) \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è il vettore velocità delle particelle fluide, $\mathbf{H}$ il vettore del campo magnetico, p la pressione ed $\mathbf{F}$ la forza di natura non elettromagnetica, riferita all'unità di massa, che si suppongono funzioni del punto $\mathrm{P}(x, y, z)$ e del tempo t, mentre la densità ρ, il coefficiente di viscosità ν, la permeabilità magnetica μ e la conducibilità elettrica σ si ritengono costanti. La costante $\eta = 1/(\mu\,\sigma)$, è notoriamente il coefficiente di diffusività magnetica.

Poiché

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{H}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{H} - \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{H}^2\right),$$

ponendo

$$q = \frac{1}{\rho}\left(p + \frac{1}{2}\,\mu\mathrm{H}^2\right), \tag{5}$$

l'equazione (1) del moto si può scrivere

$$\nu\Delta_2\,\boldsymbol{v} - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,q = \frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}}\,\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho}\,\frac{d\mathbf{H}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{H} - \mathbf{F}. \tag{6}$$

Così pure la (3) si può scrivere

$$\eta\Delta_2\,\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{H} \wedge \boldsymbol{v}). \tag{7}$$

Alle equazioni (6) e (2), nonché alle (7) e (4) associeremo rispettivamente le equazioni aggiunte [(2)]

$$\nu\Delta_2\,\boldsymbol{v}' + \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} - \mathrm{grad}\,q' = 0\,, \tag{8} \qquad (8')\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}' = 0$$

$$\eta\Delta_2\,\mathbf{H}' + \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\mathrm{Q}' = 0\,, \tag{9} \qquad (9')\quad \mathrm{div}\,\mathbf{H}' = 0,$$

con la condizione

$$\Delta_2\,\mathrm{Q}' = 0 \tag{10}$$

(2) Si osservi che se si assumessero come equazioni aggiunte della (7) e (4) le

$$\eta\Delta_2\,\mathbf{H}^* + \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial t} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\;\mathbf{H}^* = 0,$$

ponendo

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H}' - \mathrm{grad}\int \mathrm{Q}'\,dt \quad , \quad \text{con } \Delta_2\,\mathrm{Q}' = 0,$$

avremmo le equazioni (9) e (9').

3. Incominciamo a stabilire le equazioni integrali per le componenti (u, v, w) del vettore velocità $\boldsymbol{v}$ e per la funzione q.

Indicando con $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ i versori di una terna di assi cartesiani ortogonali x, y, z, con l'origine in un punto O, le equazioni (8) e (8') ammettono la soluzione

$$\text{(11)} \qquad \boldsymbol{v}_1' = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{i}) \equiv \operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \Delta_2 \varphi \boldsymbol{i} \;,\quad q_1' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\, \Delta_2 \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

e altre due analoghe $(\boldsymbol{v}_2', q_2')$, $(\boldsymbol{v}_3', q_3')$, che si ottengono scambiando fra di loro le coordinate x, y, z, e i versori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, con la condizione che la funzione φ soddisfi all'equazione

$$\text{(12)} \qquad \Delta_2\left(\nu \Delta_2 \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0.$$

Una soluzione dell'equazione (12) che dipenda soltanto dalla distanza $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ di un punto $P(x, y, z)$ da un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, e dal tempo t, è data da

$$\text{(13)} \qquad \varphi(r, t) = \frac{1}{r\sqrt{t_0 - t}} \int_{r'}^{r} e^{-\frac{\xi^2}{4\nu(t_0 - t)}}\, d\xi,$$

dove la costante r' sarà considerata come il raggio di una sferetta con centro in P_0. La funzione $\varphi(r, t)$ sarà definita per $0 \leq t < t_0$, e sarà nulla per $t \geq t_0$.

Consideriamo ora un dominio $D(t)$ limitato da una superficie $\Sigma(t)$, in generale variabile col tempo. Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto interno a questo dominio e sia Σ_0 una sfera con centro in P_0 e raggio r sufficientemente piccolo in modo che questa sfera, nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq t_0$, sia tutta contenuta nel dominio $D(t)$. Indichiamo con $D'(t)$ il dominio limitato dalle superfici $\Sigma(t)$ e Σ_0.

Ciò premesso moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione (6) scalarmente per $\boldsymbol{v}'$, ambo i membri della (8) scalarmente per $\boldsymbol{v}$, e sottraiamo quindi membro a membro; si ottiene così la combinazione

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}') - \nu(\Delta_2 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' - \Delta_2 \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{v}) + (\operatorname{grad} q \times \boldsymbol{v}' - \operatorname{grad} q' \times \boldsymbol{v}) =$$
$$= -\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' + \frac{\mu}{\rho}\frac{d\mathbf{H}}{dP}\mathbf{H} \times \boldsymbol{v}' + \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}'.$$

Osserviamo che si può scrivere

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' = \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}) - \frac{d\boldsymbol{v}'}{dP}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dP}\mathbf{H} \times \boldsymbol{v}' = \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \boldsymbol{v}' \cdot \mathbf{H}) - \frac{d\boldsymbol{v}'}{dP}\mathbf{H} \times \mathbf{H},$$

e che risulta

$$\operatorname{grad} q \times \boldsymbol{v}' - \operatorname{grad} q' \times \boldsymbol{v} = \operatorname{div}(q\boldsymbol{v}' - q'\boldsymbol{v}).$$

Integriamo quindi ambo i membri della (14) rispetto al dominio $D'(t)$, applicando le note formule di trasformazione degli integrali di volume in integrali di superficie, e ricordiamo che se $F(P, t)$ è una funzione derivabile definita in una regione dello spazio contenente il dominio $D(t)$, limitato da una superficie $S(t)$, variabile col tempo t, sussiste la relazione

$$\int_{D(t)} \frac{\partial F}{\partial t} d\tau = \frac{d}{dt} \int_{D(t)} F\, d\tau + \int_{S(t)} F V_n dS$$

dove V_n è la componente, secondo la normale interna, della velocità con cui si spostano i punti di $S(t)$. Si deduce allora

$$(15) \qquad \frac{d}{dt} \int_{D'(t)} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \cdot d\tau + \int_{\Sigma(t)+\Sigma_0} \nu \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dn} \times \boldsymbol{v}' - \frac{d\boldsymbol{v}'}{dn} \times \boldsymbol{v} \right) d\Sigma + \int_{\Sigma(t)+\Sigma_0} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \cdot V_n \, d\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma(t)+\Sigma_0} (q\boldsymbol{v}' - q'\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{n}\, d\Sigma = \int_{\Sigma(t)+\Sigma_0} \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho} \mathbf{H} \times \boldsymbol{v}' \cdot \mathbf{H} \right) \times \boldsymbol{n} \cdot d\Sigma +$$

$$+ \int_{D'(t)} \left(\frac{d\boldsymbol{v}'}{dP} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho} \frac{d\boldsymbol{v}'}{dP} \mathbf{H} \times \mathbf{H} \right) d\tau + \int_{D'(t)} \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}' \cdot d\tau ,$$

essendo n la normale a Σ, oppure a Σ_0, interna a $D'(t)$, ed $\boldsymbol{n}$ il versore di questa normale.

Integriamo ora ambo i membri dell'equazione (15) rispetto al tempo da o a t_0; poiché è $\boldsymbol{v}' = 0$, per $t = t_0$, e quindi

$$\int_{D'(t_0)} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}')_{t=t_0} d\tau = 0,$$

si ottiene

$$(16) \qquad - \int_{D'(0)} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}')_{t=0} dt + \int_{\Sigma(t)} \Big\{ \nu \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dn} \times \boldsymbol{v}' - \frac{d\boldsymbol{v}'}{dn} \times \boldsymbol{v} \right) + V_n \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' - (q\boldsymbol{v}' - q'\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{n} -$$

$$- \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho} \mathbf{H} \times \boldsymbol{v}' \cdot \mathbf{H} \right) \times \boldsymbol{n} \Big\} d\Sigma +$$

$$+ \int_{\Sigma_0} \Big\{ \nu \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dn} \times \boldsymbol{v}' - \frac{d\boldsymbol{v}'}{dn} \times \boldsymbol{v} \right) + V_n \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' - (q\boldsymbol{v}' - q'\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{n} -$$

$$- \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho} \mathbf{H} \times \boldsymbol{v}' \cdot \mathbf{H} \right) \times \boldsymbol{n} \Big\} d\Sigma =$$

$$= \int_{D'(t)} \left(\frac{d\boldsymbol{v}'}{dP} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho} \frac{d\boldsymbol{v}'}{dP} \mathbf{H} \times \mathbf{H} \right) d\tau + \int_{D'(t)} \mathbf{F} \times \boldsymbol{v}' \, d\tau .$$

Sostituendo in questa equazione in luogo del vettore $\boldsymbol{v}'$ e dello scalare q' i valori $\boldsymbol{v}'_1$, q'_1 definiti dalle (11), essendo la funzione $\varphi(r, t)$ espressa dalla (13), e passando quindi al limite quando il raggio r' della sfera Σ_0 tende a zero, si deduce, per la componente $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$ della velocità $\boldsymbol{v}$, l'equazione integrale

$$(17)\qquad 4\pi\sqrt{\pi\nu}\, u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int_{D(0)} (\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{v}_1')_{t=0}\, d\tau - \sqrt{\pi\nu}\int_{\Sigma(t_0)} \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\frac{x-x_0}{r^3}\, d\Sigma$$
$$-\int_0^{t_0} dt \int_{\Sigma(t)} \left\{ \nu\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dn}\times \boldsymbol{v}_1' - \frac{d\boldsymbol{v}_1'}{dn}\times\boldsymbol{v}\right) + (V_n\boldsymbol{v} - q\boldsymbol{n})\times \boldsymbol{v}_1' - \right.$$
$$\left. -\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho}\mathbf{H}\times\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{H}\right)\times \boldsymbol{v}_1' \right\} d\Sigma + \int_0^{t_0} dt \int_{D(t)} \left(\frac{d\boldsymbol{v}_1'}{dP}\, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho}\frac{d\boldsymbol{v}_1'}{dP}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H}\right) d\tau + \int_{D(t)} \mathbf{F}\times\boldsymbol{v}_1'\, d\tau .$$

Altre due equazioni analoghe si ottengono per le componenti $v(x_0, y_0, z_0, t_0)$, $w(x_0, y_0, z_0, t_0)$ della velocità $\boldsymbol{v}$, sostituendo al vettore $\boldsymbol{v}_1'$ i vettori $\boldsymbol{v}_2'$, $\boldsymbol{v}_3'$, cioè scambiando x con y e con z. Nelle formule che così si ottengono i vettori $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$, $\boldsymbol{v}_3'$ si devono intendere calcolati per $r' = 0$, ponendo cioè

$$(18)\qquad \varphi = \frac{1}{r\sqrt{t_0 - t}} \int_0^r e^{-\frac{\xi^2}{4\nu(t_0-t)}}\, d\xi .$$

Queste formule esprimono, sotto forma di equazioni integrali, le componenti u, v, w della velocità in un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ interno al dominio considerato, e in un istante $t_0 > 0$, per mezzo dei loro valori all'istante $t = 0$, e per mezzo dei valori di $\boldsymbol{v}, \frac{d\boldsymbol{v}}{dn}$, q e del campo magnetico $\mathbf{H}$ sulla frontiera $\Sigma(t)$.

Una formula corrispondente alla (17) si ottiene per la funzione $q(x_0, y_0, z_0, t_0)$, che a meno del fattore $1/\rho$ rappresenta la somma della pressione idrodinamica e della pressione magnetica, ponendo nella (16)

$$(19)\qquad \boldsymbol{v}' = \frac{r'}{2}\frac{E(r', t)}{t_0 - t}\operatorname{grad}\frac{1}{r} \quad , \quad q' = \frac{r'}{2r}\frac{\partial}{\partial t}\frac{E(r', t)}{t_0 - t},$$

con

$$E(r', t) = \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\nu(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0 - t}} .$$

Passando al limite per $r' \to 0$, si deduce

$$(20)\qquad 4\pi q(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$
$$= \left\{ \int_{\Sigma(t)} \left[\left(q\boldsymbol{n} - V_n\boldsymbol{v} - \nu\frac{d\boldsymbol{v}}{dn}\right) + \left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho}\mathbf{H}\times\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{H}\right)\right]\times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot d\Sigma + \right.$$
$$+ \int_{\Sigma(t)} \nu\boldsymbol{v}\times\frac{d}{dn}\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot d\Sigma + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma(t)} \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}}{r}\, d\Sigma +$$
$$\left. + \int_{D(t)} \left(\frac{d\operatorname{grad}\frac{1}{r}}{dP}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho}\frac{d\operatorname{grad}\frac{1}{r}}{dP}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H}\right) d\tau + \int_{D(t)} \mathbf{F}\times\operatorname{grad}\frac{1}{r}\, d\tau \right\}_{t=t_0} .$$

4. Rimane ora da stabilire delle formule analoghe alla (17) per le componenti H_x, H_y, H_z del campo magnetico. Per questo delle equazioni aggiunte (9) e (9′) consideriamo la soluzione

$$\mathbf{H}_1' = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\psi\wedge\boldsymbol{i}) = \operatorname{grad}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \Delta_2\psi\cdot\boldsymbol{i} \quad , \quad Q_1' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\,\Delta_2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \tag{21}$$

con le altre due $(\mathbf{H}_2', Q_2')$, $(\mathbf{H}_3', Q_3')$ che si ottengono scambiando x con y e con z, dove la funzione ψ si ottiene dalla φ ponendo il coefficiente di diffusività magnetica η al posto del coefficiente di viscosità cinematica ν, cioè

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r\sqrt{t_0 - t}}\int_{r'}^{r} e^{-\frac{\xi^2}{4\eta(t_0-t)}}\,d\xi\,. \tag{22}$$

Scrivendo un'equazione analoga alla (14):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\times\mathbf{H}') - \eta(\Delta_2\mathbf{H}\times\mathbf{H}' - \Delta_2\mathbf{H}'\times\mathbf{H}) - \operatorname{grad} Q'\times\mathbf{H} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{H})\times\mathbf{H}' =$$
$$= -\operatorname{div}[(\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v})\wedge\mathbf{H}'] - \mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}',$$

integrando prima rispetto al dominio $D'(t)$ limitato dalla superficie $\Sigma[t]$ e dalla superficie sferica Σ_0 di centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e raggio r', e poi rispetto al tempo da zero a t_0, si ottiene

$$\begin{aligned} &-\int_{D'(0)}(\mathbf{H}\times\mathbf{H}')_{t=0}\,d\tau + \\ &+\int_0^{t_0}dt\int_{\Sigma(t)}\left\{\eta\left(\frac{d\mathbf{H}}{dn}\times\mathbf{H}' - \frac{d\mathbf{H}'}{dn}\times\mathbf{H}\right) + V_n\mathbf{H}\times\mathbf{H}' + Q'\mathbf{H}\times\boldsymbol{n} - (\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v})\wedge\mathbf{H}'\times\boldsymbol{n}\right\}d\Sigma + \\ &+\int_0^{t_0}dt\int_{\Sigma_0}\left\{\eta\left(\frac{d\mathbf{H}}{dn}\times\mathbf{H}' - \frac{d\mathbf{H}'}{dn}\times\mathbf{H}\right) + V_n\mathbf{H}\times\mathbf{H}' + Q'\mathbf{H}\times\boldsymbol{n} - (\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v})\wedge\mathbf{H}'\times\boldsymbol{n}\right\}d\Sigma + \\ &+\int_0^{t_0}dt\int_{D'(t)}\operatorname{rot}\mathbf{H}'\times\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v}\cdot d\tau = 0\,. \end{aligned} \tag{23}$$

In questa equazione occorrerà sostituire al vettore $\mathbf{H}'$, e alla funzione scalare Q', successivamente i vettori $\mathbf{H}_1'$, $\mathbf{H}_2'$, $\mathbf{H}_3'$, e le funzioni scalari Q_1', Q_2', Q_3', e passare quindi al limite per $r' \to 0$. Così facendo abbiamo l'equazione

$$\begin{aligned} 4\pi\sqrt{\pi\eta}\,H_x(x_0, y_0, z_0, t_0) = &\int_{D(0)}(\mathbf{H}\times\mathbf{H}_1')_{t=0}\,d\tau - \sqrt{\pi\eta}\int_{\Sigma(t_0)}\mathbf{H}\times\boldsymbol{n}\,\frac{x - x_0}{r^3}\,d\Sigma - \\ &-\int_0^{t_0}dt\int_{\Sigma(t)}\left\{\eta\left(\frac{d\mathbf{H}}{dn}\times\mathbf{H}_1' - \frac{d\mathbf{H}_1'}{dn}\times\mathbf{H}\right) + V_n\mathbf{H}\times\mathbf{H}_1' - (\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v})\wedge\mathbf{H}_1'\times\boldsymbol{n}\right\}d\Sigma - \\ &-\int_0^{t_0}dt\int_{D(t)}\operatorname{rot}\mathbf{H}_1'\times\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v}\cdot d\tau\,, \end{aligned} \tag{24}$$

con due formule analoghe per le componenti $H_y(x_0, y_0, z_0, t_0)$, $H_z(x_0, y_0, z_0, t_0)$.

In queste formule i vettori $\mathbf{H}_1'$, $\mathbf{H}_2'$, $\mathbf{H}_3'$ vanno considerati per $r' = 0$, cioè per

$$\psi = \frac{1}{r\sqrt{t_0 - t}} \int_0^r e^{-\frac{\xi^2}{4\eta(t_0-t)}} d\xi . \tag{25}$$

L'equazione integrale (14), e le due analoghe, esprimono le componenti del campo magnetico $\mathbf{H}$ in un punto $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ e in un istante $t_0 > 0$, per mezzo dei valori all'istante iniziale $t = 0$ e per mezzo dei valori di $\mathbf{H}$, di $d\mathbf{H}/dn$ e di $\boldsymbol{v}$ sulla superficie $\Sigma(t)$.

5. Nel secondo membro della (17), e nelle analoghe, si può far comparire il vortice all'istante iniziale, osservando che si ha

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi \wedge \boldsymbol{i}) = \operatorname{div}[(\operatorname{grad}\varphi \wedge \boldsymbol{i}) \wedge \boldsymbol{v}] + \operatorname{rot}\boldsymbol{v} \times \operatorname{grad}\varphi \wedge \boldsymbol{i}$$

e quindi

$$\int_{D(0)} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}_1')_{t=0}\, d\tau = \int_{D(0)} (\operatorname{rot}\boldsymbol{v} \wedge \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{i})_{t=0}\, d\tau - \tag{26}$$
$$- \int_{\Sigma(0)} \left(\boldsymbol{v} \times \operatorname{grad}\varphi \cdot \cos nx - u \frac{d\varphi}{dn}\right)_{t=0} d\Sigma.$$

Così pure nell'equazione (24), e nelle analoghe, si può fare comparire la densità di corrente $\mathbf{I} = \operatorname{rot}\mathbf{H}$, all'istante iniziale, avendosi

$$\int_{D(0)} (\mathbf{H} \times \mathbf{H}_1')_{t=0}\, d\tau = \int_{D(0)} (\mathbf{I} \wedge \operatorname{grad}\psi \times \boldsymbol{i})_{t=0}\, d\tau - \tag{27}$$
$$- \int_{\Sigma(0)} \left(\mathbf{H} \times \operatorname{grad}\psi \cdot \cos nx - H_x \frac{d\psi}{dn}\right)_{t=0} d\Sigma.$$

Nell'ipotesi ora che il dominio D occupato dal fluido si estenda a tutto lo spazio, che le forze di massa $\mathbf{F}$ siano nulle, che le componenti della velocità del campo magnetico, le loro derivate e la funzione q verifichino delle disuguaglianze della forma

$$|u|, |v|, |w| < \frac{A}{(1+\alpha R)^\delta} \quad ; \quad |H_x|, |H_y|, |H_z| < \frac{B}{(1+\alpha R)^\delta}, \ |q| < \frac{C}{(1+\alpha R)^\delta}$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \dots < \frac{M}{(1+\alpha R)^{1+\delta}} \quad , \quad \left|\frac{\partial H_x}{\partial x}\right|, \dots < \frac{N}{(1+\alpha R)^{1+\delta}},$$

dove A, B, ..., N sono delle quantità positive, α un numero positivo avente le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, δ un numero compreso fra zero e uno, ed $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la distanza di un punto $P(x, y, z)$ dall'origine, si verifica facilmente che gli integrali di volume risultano convergenti e gli integrali di superficie estesi a una sfera con centro nell'origine e di raggio R, tendono a zero per $R \to \infty$. Le equazioni (17), (20), (24) e analoghe, tenendo conto delle (26) e (27), porgono al limite

$$4\pi\sqrt{\pi\nu}\,u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \iiint (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \wedge \mathrm{grad}\,\varphi \times \boldsymbol{i})_{t=0}\,d\tau + \tag{28}$$

$$+\int_0^{t_0} dt \iiint \left(\frac{d\boldsymbol{v}_1'}{dP}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho}\,\frac{d\boldsymbol{v}_1'}{dP}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H}\right) d\tau$$

. . . .

$$4\pi q(x_0, y_0, z_0, t_0) = \iiint \left\{ \frac{d\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}}{dP}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} - \frac{\mu}{\rho}\,\frac{d\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}}{dP}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H}\right\}_{t=t_0} d\tau \tag{29}$$

$$4\pi\sqrt{\pi\eta}\,H_x(x_0, y_0, z_0, t_0) = \iiint (\mathbf{I}\wedge \mathrm{grad}\,\psi\times\boldsymbol{i})_{t=0}\,d\tau - \tag{30}$$

$$-\int_0^{t_0} dt \iiint \mathrm{rot}\,\mathbf{H}'\times\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v}\cdot d\tau.$$

. . . .

Se inizialmente, per $t = 0$, il moto vorticoso è limitato a una regione D_0 nell'intorno dell'origine, e in quell'istante la corrente di conduzione $\mathbf{I}$ è circoscritta alla stessa regione, mentre all'esterno di essa è $\omega = 1/2\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = 0$, ed $\mathbf{I} = \mathrm{rot}\ \mathbf{H} = 0$, le equazioni integrali (28) e (30) permettono di risolvere il problema della determinazione della velocità e del campo magnetico in un fluido indefinito, viscoso ed elettricamente conduttore, essendo assegnata all'istante iniziale la distribuzione dei vortici e della corrente di conduzione in una regione limitata dello spazio.