Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carmelo Totaro

Su una particolare classe di movimenti di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.3, p. 398–405.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_3_398_0>

Meccanica. — *Su una particolare classe di movimenti di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla* [*]. Nota di CARMELO TOTARO, presentata [**] dal Corrisp. D. GRAFFI.

SUMMARY. — We can study the motions of an asymmetrical rigid body, submitted to no-power forces (e. g., Coriolis's or Lorentz's forces), with respect to a point O. The dynamical problem is reduced to integration for a subset of ∞^4 motions; which, as particular cases, includes some motions already known. We can, finally, determine a motion which asymptotically is to become a permanent rotation around a principal axis of inertia; which in its turn is to assume a privileged direction.

1. Mi propongo di studiare una particolare classe di movimenti di un corpo rigido asimmetrico $\mathcal{C}$, rispetto ad un punto O, in presenza di forze di potenza nulla. Può trattarsi, ad esempio, delle forze di Coriolis che agiscono su un $\mathcal{C}$ in moto rispetto alla Terra. Forze, matematicamente rappresentabili in maniera analoga, possono presentarsi anche nel caso di un corpo elettrizzato, mobile in un campo magnetico uniforme.

Le equazioni del movimento sono

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\,\sigma)\,\mathbf{H} = 0 \\ \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H} = 0, \end{cases}$$

ove σ è l'omografia d'inerzia, λ l'invariante lineare di σ, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare di $\mathcal{C}$ nel suo moto rispetto al riferimento $\mathcal{S}$ ed $\mathbf{H}$ un vettore invariabile rispetto ad $\mathcal{S}$.

Queste equazioni valgono nel caso delle forze di Coriolis e anche per quelle di Lorentz, purché con riferimento a queste ultime, l'ellissoide principale di centro O relativo alla distribuzione delle cariche elettriche e quello d'inerzia siano omotetici [1]. Cercherò soluzioni di (1) tali che

$$(2) \qquad \mathbf{H} = \varepsilon\,\boldsymbol{\omega}\,,$$

ove $\varepsilon = |\,\varepsilon_{rs}\,| \, (r\,,s = 1\,,2\,,3)$ è una omografia le cui componenti rispetto ad assi solidali sono indipendenti dal tempo; ovviamente soluzioni siffatte sono precessioni generalizzate degeneri [2].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 7 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

(1) Per più ampie indicazioni cfr.: G. GRIOLI, *Questioni di dinamica del corpo rigido*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXXV, fasc. 1–2 (1963).

(2) G. GRIOLI, *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXXIV, fasc. 6 (1963).

Mostrerò che, nell'insieme ∞^6 di soluzioni di (1), si può ridurre alle quadrature il problema dinamico per un sottoinsieme ∞^4 di movimenti del tipo (2) che, come casi particolari, comprende alcuni movimenti già noti [(3)].

Inoltre, determinerò un tipo di movimento che tende asintoticamente a diventare una rotazione permanente intorno ad un asse principale d'inerzia.

2. Siano $Ox_1\,x_2\,x_3$ una terna cartesiana ortogonale levogira solidale con $\mathcal{S}$, $O\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ un'analoga terna solidale con $\mathcal{C}$ coincidente con la terna degli assi principali d'inerzia di $\mathcal{C}$ relativi al punto O, p, q, r e H_1, H_2, H_3, le componenti dei vettori $\boldsymbol{\omega}$ ed $\mathbf{H}$ rispetto a quest'ultima terna e A, B, C i momenti principali d'inerzia di $\mathcal{C}$ relativi ad O. Si ponga

$$-2\sigma = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}, \tag{3}$$

ove

$$\begin{cases} \lambda = A + B + C \\ \alpha = -A + B + C \quad , \quad \beta = A - B + C \quad , \quad \gamma = A + B - C. \end{cases} \tag{4}$$

Con riferimento alla (2), viene innanzi tutto spontaneo considerare il caso $\varepsilon = a\,\sigma$, ove a è un coefficiente scalare arbitrario. Si trovano, con brevi e facili calcoli, come dinamicamente possibili, soltanto note rotazioni uniformi [(4)].

Si faccia ora un'ipotesi un pó più generale circa la ε, supponendo precisamente che tale omografia abbia tre direzioni unite coincidenti con quelle di σ e siano

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \quad , \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \quad , \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \tag{5}$$

i coefficienti principali di ε.

Le (1), con (2) e (5), dànno luogo alle equazioni

$$\begin{cases} A\dot{p} + [(C - B) + \beta\varepsilon_2 - \gamma\varepsilon_3]\,qr = 0 \\ B\dot{q} + [(A - C) + \gamma\varepsilon_3 - \alpha\varepsilon_1]\,rp = 0 \\ C\dot{r} + [(B - A) + \alpha\varepsilon_1 - \beta\varepsilon_2]\,pq = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1\dot{p} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\,qr = 0 \\ \varepsilon_2\,\dot{q} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\,rp = 0 \\ \varepsilon_3\,\dot{r} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,pq = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Il caso che qualche componente di $\boldsymbol{\omega}$ sia nulla non presenta alcun interesse speciale, perché si riottengono note rotazioni uniformi [(4)].

(3) Cfr. le Memorie citate alle note (4) e (5).

(4) G. GRIOLI, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, « Rend. del Sem. Mat. dell'Università di Padova », vol. XXVII (1957).

Supponendo invece p, q, r non identicamente nulle ed eliminandole da (6) e (7), si hanno le seguenti condizioni di compatibilità

$$
(8) \qquad \begin{cases} \beta\varepsilon_1\,\varepsilon_2 - \gamma\varepsilon_1\,\varepsilon_3 + (C-B)\,\varepsilon_1 + A\,\varepsilon_2 - A\,\varepsilon_3 = 0 \\ \gamma\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - \alpha\varepsilon_2\,\varepsilon_1 - B\,\varepsilon_1 + (A-C)\,\varepsilon_2 + B\,\varepsilon_3 = 0 \\ \alpha\varepsilon_3\,\varepsilon_1 - \beta\varepsilon_3\,\varepsilon_2 + C\,\varepsilon_1 - C\,\varepsilon_2 + (B-A)\,\varepsilon_3 = 0. \end{cases}
$$

Le (8) non sono indipendenti, perché una è combinazione lineare delle due rimanenti.

Se si tenta di soddisfare le (8) imponendo a priori che due fra i tre coefficienti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ debbono essere uguali tra loro, segue che anche il terzo è uguale ai primi due e si ha

$$
(9) \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\,.
$$

Segue poi dalle (7) che p, q, r sono costanti. Si ritrovano altre note rotazioni uniformi (4). Note rotazioni uniformi si ottengono anche se, invece di (9), si suppone che una o due delle ε_i siano nulle.

I casi particolari accennati portano, in realtà, a tutti i possibili moti rotatori uniformi di $\mathcal{C}$ (4).

Rinuncio, per brevità, a dimostrare che, ove una sola delle ε_i sia nulla, si ritrovano pure certe precessioni semiregolari determinate da G. Grioli (5).

3. È ormai opportuno, abbandonando ogni ipotesi a priori circa le ε_i ($i = 1, 2, 3$), osservare che esistono ∞^1 modi (differenti da quelli detti) per soddisfare le (8).

Infatti, da queste condizioni di compatibilità, segue

$$
(10) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{[\gamma\varepsilon_3^2 + 2\,(A-C)\,\varepsilon_3 - C] \pm \sqrt{\Delta}}{2\,(\alpha\varepsilon_3 + C)} \\[2ex] \varepsilon_2 = \dfrac{[\gamma\varepsilon_3^2 + 2\,(B-C)\,\varepsilon_3 - C] \pm \sqrt{\Delta}}{2\,(\beta\varepsilon_3 + C)}, \end{cases}
$$

ove

$$
(11) \qquad \Delta = \gamma^2\,\varepsilon_3^4 + 4\,(2\,AB - C\,\gamma)\,\varepsilon_3^3 + 2\,[2\,(AB + C^2) - C\gamma]\,\varepsilon_3^2 + 4\,C^2\,\varepsilon_3 + C^2.
$$

Ovviamente esistono valori reali di ε_3 che rendono $\Delta > 0$. Dopo ciò la risoluzione del problema dinamico è ricondotta alla integrazione del sistema (7). Tale sistema non è proprio del tipo di Poinsot perché le ε_i, in generale, non sono interpretabili come momenti d'inerzia. Sostituendo in (7) le (10) resta un solo parametro arbitrario, ε_3, che si può calcolare in funzione delle condi-

(5) G. Grioli, *Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXII, fasc. 4 (1957).

zioni iniziali relative al sistema (1), cioè per mezzo dell'equazione

$$(12)\qquad \varepsilon_1^2 p_0^2 + \varepsilon_2^2 q_0^2 + \varepsilon_3^2 r_0^2 = H_1^{0^2} + H_2^{0^2} + H_3^{0^2} \equiv H^2 ,$$

ove $p_0, q_0, r_0, H_1^0, H_2^0, H_3^0$ sono le componenti iniziali di $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{H}$.

Come nel caso di Poinsot, sussistono per il sistema (7) i due integrali primi

$$(13)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2 + \varepsilon_3 r^2 = h \equiv \text{cost} \\ \varepsilon_1^2 p^2 + \varepsilon_2^2 q^2 + \varepsilon_3^2 r^2 = H^2 \equiv \text{cost} \end{cases}$$

e pertanto l'integrazione si riconduce facilmente alle quadrature.

Trovo così che è possibile caratterizzare completamente nell'insieme delle ∞^6 soluzioni del sistema (1) un sottoinsieme di ∞^4 soluzioni. Naturalmente, occorre che $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ siano reali; cioè i valori reali di ε_3, ricavati da (12), devono rendere il Δ, dato da (11), maggiore o uguale a zero.

Per brevità, rinuncio qui ad una discussione generale e dettagliata di tutti i possibili movimenti corrispondenti a questo sottoinsieme di ∞^4 soluzioni e mi limito solo a mostrare che esso comprende, in particolare, moti già trovati da G. Grioli (6) nel 1957 nell'ipotesi che i piani ciclici dell'ellissoide principale di centro O del corpo $\mathcal{C}$ siano tra loro ortogonali, condizione che si traduce nella relazione

$$(14)\qquad A = \frac{B+C}{2} .$$

Per un corpo siffatto sono dinamicamente possibili, oltre certi movimenti più complicati, cui accennerò brevemente, i movimenti trovati dall'Autore suddetto e rappresentabili, con riferimento alla terna $O\xi_1\xi_2\xi_3$, nella forma

$$(15)\qquad \begin{cases} p = -H\dfrac{1+b^2}{2}\,\dfrac{\upsilon e^{2bHt}-1}{\upsilon e^{2bHt}+1}, & H_1 = -\dfrac{2}{b^2+1}\,p \\[2ex] q = -H\dfrac{\sqrt{2\upsilon}\,(b^3+b^2+3b-1)}{2\sqrt{b^2+1}}\,\dfrac{e^{bHt}}{\upsilon e^{2bHt}+1}, & H_2 = -\dfrac{2(b-1)}{b^3+b^2+3b-1}\,q \\[2ex] r = -H\dfrac{\sqrt{2\upsilon}\,(b^3-b^2+3b+1)}{2\sqrt{b^2+1}}\,\dfrac{e^{bHt}}{\upsilon e^{2bHt}+1}, & H_3 = -\dfrac{2(b+1)}{b^3-b^2+3b+1}\,r, \end{cases}$$

ove υ è una costante arbitraria positiva e b un qualunque numero soddisfacente alla relazione

$$(16)\qquad \frac{b^4-2b^3+2b^2-2b-3}{b^4+2b^3+2b^2+2b-3} = \frac{B}{C} \mp 1 .$$

Per mostrare che le (18) fanno parte del detto sottoinsieme di soluzioni e determinarne delle nuove si assuma

$$(17)\qquad \varepsilon_1 = -\frac{2}{b^2+1}\ ,\quad \varepsilon_2 = -\frac{2(b-1)}{b^3+b^2+3b-1}\ ,\quad \varepsilon_3 = -\frac{2(b+1)}{b^3-b^2+3b+1} .$$

(6) Cfr. il n. 4 di (5).

Per mezzo di (14) e (17) le condizioni di compatibilità (8) si riconducono alla (16), mentre il sistema (7) assume la forma

$$(18) \qquad \begin{cases} \dot{P} + 4\,bl\,QR = 0 & \\ \dot{Q} - 2\,b\,RP = 0 & (b \neq 1) \\ \dot{R} - 2\,b\,PQ = 0 & (b \neq -1), \end{cases}$$

ove

$$(19) \qquad \begin{cases} l = b^2 + 1 & P = \dfrac{p}{l} \\ m = b^3 + b^2 + 3\,b - 1 & Q = \dfrac{q}{m} \\ n = b^3 - b^2 + 3\,b + 1 & R = \dfrac{r}{n} \,. \end{cases}$$

Per il sistema (18) valgono i due integrali primi

$$(20) \qquad \begin{cases} P^2 + l\,Q^2 + l\,R^2 = k^2 \equiv \text{cost} \\ P^2 + (b-1)^2\,Q^2 + (b+1)^2\,R^2 = \dfrac{H^2}{4} \equiv \text{cost.} \end{cases}$$

Il primo di questi si ottiene direttamente dalle equazioni (18) moltiplicate per opportuni coefficienti e sommate membro a membro. Il secondo si può ottenere con metodo analogo, oppure da (13_2), tenendo conto delle (17). Da (20) segue

$$(21) \qquad \begin{cases} Q^2 = -\dfrac{1}{2\,l}\,P^2 + \dfrac{4\,(b+1)^2\,k^2 - l\,H^2}{16\,bl} \\ R^2 = -\dfrac{1}{2\,l}\,P^2 + \dfrac{l\,H^2 - 4\,(b-1)^2\,k^2}{16\,bl} \,. \end{cases}$$

Sostituendo in (18) si ha

$$(22) \qquad \dot{P} \pm 2\,b\,\sqrt{P^4 - 2\,k^2\,P^2 + S} = 0\,,$$

ove

$$(23) \qquad S = -\frac{1}{64\,b^2}\,[16\,(b^2-1)^2\,k^4 - 8\,l^2\,k^2\,H^2 + l^2\,H^4].$$

Da (22) segue che P si esprime, in generale, con funzioni ellittiche e quindi in definitiva anche p, q, r, H_1, H_2, H_3 si esprimono con siffatte funzioni. Per ottenere da (18) la soluzione (15) di G. Grioli, bisogna supporre in (22) $S = k^4$ e ciò equivale a imporre

$$(24) \qquad k = \frac{H}{2}\,.$$

4. Considero infine una matrice ε qualunque. Per mezzo di (2), il sistema (1) assume la forma

$$(25)\quad \begin{cases} A\dot{p}+0-\gamma\varepsilon_{32}q^2+\beta\varepsilon_{23}r^2+[(C-B)+\beta\varepsilon_{22}-\gamma\varepsilon_{33}]\,qr+\beta\varepsilon_{21}rp-\gamma\,\varepsilon_{31}pq=0 \\ B\dot{q}+\gamma\varepsilon_{31}p^2+0-\alpha\varepsilon_{13}r^2-\alpha\varepsilon_{12}qr+[(A-C)+\gamma\varepsilon_{33}-\alpha\varepsilon_{11}]\,rp+\gamma\varepsilon_{32}pq=0 \\ C\dot{r}-\beta\varepsilon_{21}p^2+\alpha\varepsilon_{12}q^2+0+\alpha\varepsilon_{13}qr-\beta\varepsilon_{23}rp+[(B-A)+\alpha\varepsilon_{11}-\beta\varepsilon_{22}]\,pq=0 \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} \varepsilon_{11}\dot{p}+\varepsilon_{12}\dot{q}+\varepsilon_{13}\dot{r}+0+\varepsilon_{32}q^2-\varepsilon_{23}r^2+(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{22})\,qr-\varepsilon_{21}rp+\varepsilon_{31}pq=0 \\ \varepsilon_{21}\dot{p}+\varepsilon_{22}\dot{q}+\varepsilon_{23}\dot{r}-\varepsilon_{31}p^2+0+\varepsilon_{13}r^2+\varepsilon_{12}qr+(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})\,rp-\varepsilon_{32}pq=0 \\ \varepsilon_{31}\dot{p}+\varepsilon_{32}\dot{q}+\varepsilon_{33}\dot{r}+\varepsilon_{21}p^2-\varepsilon_{12}q^2+0-\varepsilon_{13}qr+\varepsilon_{23}rp+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11})\,pq=0. \end{cases}$$

Da queste equazioni (25) e (26), nel caso che due componenti di ω si suppongano nulle a priori, è facile ritrovare le rotazioni permanenti intorno agli assi principali d'inerzia.

Suppongo allora, meno restrittivamente, una sola componente di ω nulla, ad esempio, la r. Le (25) e (26) divengono

$$(27)\quad \begin{cases} A\dot{p}-\gamma\varepsilon_{32}q^2-\gamma\varepsilon_{31}pq=0 \\ B\dot{q}+\gamma\varepsilon_{31}p^2+\gamma\varepsilon_{32}pq=0 \\ -\beta\varepsilon_{21}p^2+\alpha\varepsilon_{12}q^2+[(B-A)+\alpha\varepsilon_{11}-\beta\varepsilon_{22}]\,pq=0 \\ \varepsilon_{11}\dot{p}+\varepsilon_{12}\dot{q}+\varepsilon_{32}q^2+\varepsilon_{31}pq=0 \\ \varepsilon_{21}\dot{p}+\varepsilon_{22}\dot{q}-\varepsilon_{31}p^2-\varepsilon_{32}pq=0 \\ \varepsilon_{31}\dot{p}+\varepsilon_{32}\dot{q}+\varepsilon_{21}p^2-\varepsilon_{12}q^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11})\,pq=0. \end{cases}$$

Da $(27_{1,2})$ ottengo

$$(28)\qquad \dot{p}=\frac{\gamma}{A}\varepsilon_{32}q^2+\frac{\gamma}{A}\varepsilon_{31}pq\quad,\quad \dot{q}=-\frac{\gamma}{B}\varepsilon_{31}p^2-\frac{\gamma}{B}pq$$

e sostituendo nelle rimanenti si hanno quattro equazioni di compatibilità

$$(29)\quad \begin{cases} -\beta\varepsilon_{21}p^2+\alpha\varepsilon_{12}q^2+[(B-A)+\alpha\varepsilon_{11}-\beta\varepsilon_{22}]\,pq=0 \\ -\frac{\gamma}{B}\varepsilon_{31}\varepsilon_{12}p^2+\left(\frac{\gamma}{A}\varepsilon_{11}\varepsilon_{32}+\varepsilon_{32}\right)q^2+\left(\frac{\gamma}{A}\varepsilon_{11}\varepsilon_{31}-\frac{\gamma}{B}\varepsilon_{12}\varepsilon_{32}+\varepsilon_{31}\right)pq=0 \\ -\left(\frac{\gamma}{B}\varepsilon_{22}\varepsilon_{31}+\varepsilon_{31}\right)p^2+\frac{\gamma}{A}\varepsilon_{21}\varepsilon_{32}q^2+\left(\frac{\gamma}{A}\varepsilon_{21}\varepsilon_{31}-\frac{\gamma}{B}\varepsilon_{22}\varepsilon_{32}-\varepsilon_{32}\right)pq=0 \\ \left(-\frac{\gamma}{B}\varepsilon_{32}\varepsilon_{31}+\varepsilon_{21}\right)p^2+\left(\frac{\gamma}{A}\varepsilon_{31}\varepsilon_{32}-\varepsilon_{12}\right)q^2+\left(\frac{\gamma}{A}\varepsilon_{31}^2-\frac{\gamma}{B}\varepsilon_{32}^2+\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}\right)pq=0. \end{cases}$$

Si possono soddisfare le (29) ponendo uguali a zero i coefficienti di p, q, pq. Da ciò seguono due sistemi di valori soddisfacenti le dette equazioni; il primo riguarda il caso $B>A$, il secondo il caso $B<A$. Poiché si può sempre

supporre $B > A$, considererò solo la soluzione

$$(30)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{21} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{12} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{11} = -\dfrac{A}{\gamma} \quad , \quad \varepsilon_{22} = -\dfrac{B}{\gamma} \\ \varepsilon_{32} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{31} = \pm \dfrac{\sqrt{A(B-A)}}{\gamma} . \end{cases}$$

Il problema dinamico ormai si riduce alla integrazione delle equazioni

$$(31)\qquad \begin{cases} \dot{p} = \pm \dfrac{\sqrt{A(B-A)}}{A} pq \\ \dot{q} = \mp \dfrac{\sqrt{A(B-A)}}{B} p^2 , \end{cases}$$

da cui segue l'integrale dell'energia

$$(32)\qquad Ap^2 + Bq^2 = 2E_0 ,$$

ove E_0 è una costante.

Per mezzo di (32) da (31) si ha

$$(33)\qquad p = \pm 2 \sqrt{\frac{2E_0}{A}} \frac{e^{e_0 h (t-t_0)}}{1+e^{2e_0 h (t-t_0)}} \quad , \quad q = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{B}} \frac{1-e^{2e_0 h (t-t_0)}}{1+e^{2e_0 h (t-t_0)}} ,$$

ove si è posto

$$(34)\qquad h = \pm \frac{\sqrt{A(B-A)}}{A} \quad , \quad e_0 = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{B}} .$$

Poiché

$$(35)\qquad H_1 = -\frac{A}{\gamma} p \quad , \quad H_2 = -\frac{B}{\gamma} q \quad , \quad H_3 = \pm \frac{\sqrt{A(B-A)}}{\gamma} p ,$$

tenendo conto delle (33), per $t = t_0$ si ottiene

$$(36)\qquad H_1^0 = \mp \frac{\sqrt{2AE_0}}{\gamma} \quad , \quad H_2^0 = 0 \quad , \quad H_3^0 = \frac{\sqrt{2(B-A)E_0}}{\gamma} ,$$

ove con H_i^0 $(i = 1, 2, 3)$ si indicano i valori delle componenti di **H** per $t = t_0$. Ricordando che il modulo di **H** è costante, dalle (36) segue

$$(37)\qquad H^2 = H_1^{0^2} + H_2^{0^2} + H_3^{0^2} = \frac{B}{\gamma^2} 2E_0$$

e quindi

$$(38)\qquad 2E_0 = \frac{\gamma^2 H^2}{B} \qquad e_0 = \pm \frac{\gamma H}{B} .$$

Ormai è possibile scrivere la soluzione del sistema (1), corrispondente al caso (30), sotto la seguente forma

$$(39)\qquad \begin{cases} p = \pm \dfrac{2H\gamma}{\sqrt{AB}} f_1 \quad , \quad q = \pm \dfrac{H\gamma}{B} f_2 \quad , \quad r = 0 \\ H_1 = \mp 2H \sqrt{\dfrac{A}{B}} f_1 \quad , \quad H_2 = \mp H f_2 \quad , \quad H_3 = 2H \sqrt{\dfrac{B-A}{B}} f_1 , \end{cases}$$

ove, per brevità, si è posto

$$f_1 = \frac{e^{\mu(t-t_0)}}{1+e^{2\mu(t-t_0)}} \quad , \quad f_2 = \frac{1-e^{2\mu(t-t_0)}}{1+e^{2\mu(t-t_0)}}, \tag{40}$$

con

$$\mu = \frac{H\gamma\sqrt{A(B-A)}}{AB}. \tag{41}$$

Dalle (39) per $t = t_0$ e per $t \to +\infty$ seguono rispettivamente queste due sestuple di valori

$$\begin{cases} p_0 = \pm\dfrac{H\gamma}{\sqrt{AB}} \quad , \quad q_0 = 0 \quad , \quad r_0 = 0 \\ H_1^0 = \mp H\sqrt{\dfrac{A}{B}} \quad , \quad H_2^0 = 0 \quad , \quad H_3^0 = H\sqrt{\dfrac{B-A}{B}} \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} p_\infty = 0 \quad , \quad q_\infty = \mp\dfrac{H\gamma}{B} \quad , \quad r_\infty = 0 \\ H_{1\infty} = 0 \quad , \quad H_{2\infty} = \pm H \quad , \quad H_{3\infty} = 0. \end{cases} \tag{43}$$

Le (39), (42) e (43) permettono di enunciare il seguente risultato:

Si supponga $\mathcal{C}$ inizialmente orientato in modo che **H** *appartenga ad uno dei piani principali d'inerzia per* O; *sia, ad esempio,* O$\xi\zeta$ *tale piano. Si imprima a $\mathcal{C}$ una rotazione iniziale intorno ad* Oξ. *Se il momento d'inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto ad* Oξ *è minore del momento d'inerzia rispetto ad* Oη *e l'energia cinetica ha il valore*

$$T = \frac{\gamma^2}{2B}H^2, \tag{44}$$

si ottiene un movimento per il quale l'asse Oη *tende asintoticamente a diventare parallelo ad* **H**, *mentre il corpo $\mathcal{C}$ tende a ruotare uniformemente intorno al detto asse* Oη.

Tale risultato acquista un particolare interesse se il coefficiente μ di $t - t_0$, nelle (40), è piuttosto grande in quanto il moto effettivo si confonde, molto presto, con un moto rotatorio uniforme. Dalle (42) e (43) si desume altresì che, compatibilmente e conformemente con la conservazione dell'energia cinetica, il modulo della velocità angolare decade dal valore iniziale $H\gamma/\sqrt{AB}$ al valore finale $H\gamma/B$, minore di quello iniziale.