Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Claudio Pedrini

3-reti (non immergibili) aventi dei piani duali di quelli di Moulton quali sottopiani

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.3, p. 385–392.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_3_385_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Geometria. — 3-*reti* (*non immergibili*) *aventi dei piani duali di quelli di Moulton quali sottopiani*. Nota di CLAUDIO PEDRINI, presen tata [*] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Construction of a class of 3-nets of order n (where $n = p^h$, with p a prime integer, $p \neq 2$ and $h \geq 3$) non-derivable from a group, whence the existence of strictly transitive sets of index 3 of substitutions, which are not groups.

B. Segre ha esposto (in [5]) una teoria generale delle reti, esaminando, nella sez. 7, il problema dell'esistenza di t-reti [1] non derivabili da un gruppo, per $t \geq 3$. In questa Nota [2] si risolve tale questione nel caso $t = 3$, dando la costruzione di una classe di 3-reti non derivabili da un gruppo. Una di tali 3-reti si ottiene ampliando la 2-rete associata al piano di traslazione costruito su un particolare quasicorpo non associativo. Tale ampliamento vien fatto con un procedimento analogo a quello usato da B. Segre per costruire esempi di 3-rete non immergibili, ma derivabili da un gruppo (cfr. [5] 20-6-15).

1. ALCUNE PREMESSE. – Rimandando a B. Segre [5] (vedasi anche [2] e [3]) per una completa trattazione della teoria dei blocchi di un insieme finito, supporremo senz'altro note le proprietà generali delle t-reti e ci limiteremo, in questo numero, a dare la definizione di piano di Moulton finito.

Sia Q un quasicorpo destro (cfr. [6], p. 386) e denotiamo con $+$ e $\cdot$ le operazioni di Q; sia poi Q′ la struttura algebrica il cui insieme sostegno coincide con quello di Q e nella quale le operazioni di «addizione» ($\dot{+}$) e di «moltiplicazione» ($\circ$) sono definite al modo seguente:

$$a \dot{+} b = b + a$$
$$a \circ b = b \cdot a ,$$

per ogni coppia a , b di elementi di Q. È subito visto che Q′ risulta un quasicorpo sinistro, e che questo è associativo se, e solo se, tale è Q. Il quasicorpo Q′, così definito, dicesi *quasicorpo duale di* Q.

Pierce (in [4]) ha costruito una classe di quasicorpi sinistri, applicando al caso finito un procedimento analogo a quello classico di Moulton (vedasi anche André [1]): si introduce in campo di Galois γ una nuova

(*) Nella seduta del 12 marzo 1966.

(1) Con la denominazione di t-rete intenderemo sempre indicare una rete strettamente transitiva d'indice t. Seguendo B. Segre, con il simbolo $K_{t,n}$ intenderemo una t-rete di grado n.

(2) Che espone alcuni risultati della tesi di laurea discussa dall'autore presso l'Università di Roma (novembre 1965).

moltiplicazione $\circ$ (con $+$ e $\cdot$ si indicano le operazioni definite in γ) ponendo, per ogni coppia a, b di elementi di γ:

$$a \circ b = \begin{cases} a \cdot b & \text{se } b \in \gamma^* \\ a^{\varphi} \cdot b & \text{se } b \notin \gamma^*, b \neq 0, \\ 0 & \text{se } b = 0, \end{cases}$$

ove γ^* è l'insieme degli elementi non nulli che sono quadrati in γ e φ è un automorfismo (non identico) di γ. La struttura algebrica che le operazioni $+$ e $\circ$ definiscono nell'insieme degli elementi di γ risulta un quasicorpo sinistro Q (si osservi che, se γ ha caratteristica 2, Q e γ coincidono); chiameremo *piano di Moulton finito* il piano di traslazione costruito su Q.

2. 2–RETE (NON DERIVABILE DA UN GRUPPO) ASSOCIATA AL DUALE DI UN PIANO DI MOULTON FINITO. – Sia γ un campo finito d'ordine $q = p^h$, con $p \neq 2$, $h \geq 3$; detto φ l'automorfismo di γ così definito:

$$\varphi: \quad x \rightarrow x^p \quad , \quad \forall x \in \gamma ,$$

risulta $\varphi^2 \neq 1$. Denotiamo con γ^* il sottogruppo moltiplicativo di $\gamma - 0$, costituito dagli elementi che sono quadrati in γ, e definiamo in γ una nuova struttura moltiplicativa ponendo:

$$a \circ b = \begin{cases} a \cdot b & \text{se } a \in \gamma^*, \\ a \cdot b^{\varphi} & \text{se } a \notin \gamma^*, a \neq 0, \\ 0 & \text{se } a = 0, \end{cases}$$

per ogni coppia a, b di elementi di γ ($\cdot$ indica la moltiplicazione del campo γ).

LEMMA. – *Detta Q la struttura algebrica* $\gamma(+, \circ)$, *ove* $+$ *indica l'addizione del campo* γ, Q *risulta un quasicorpo destro non associativo.*

Dimostrazione. – Basta osservare che se, per ogni coppia $a, b \in \gamma$ si definisce l'operazione $\times$:

$$a \times b = b \circ a ,$$

l'insieme $Q'(+, \times)$ è il quasicorpo sinistro costruito, secondo il procedimento di Pierce, a partire da γ e dall'automorfismo φ. Poiché Q si ottiene da Q' per dualizzazione, Q è un quasicorpo destro. Nelle ipotesi attuali, Q e Q' non sono associativi: l'associatività ha infatti luogo se, e solo se, $x^{p^2} = x$ per ogni x di γ, cioè se $\varphi^2 = 1$, il che non si verifica.

Indichiamo con π l'insieme delle coppie ordinate di elementi di Q e definiamo «retta» di π la totalità delle coppie (x, y) soddisfacenti un'equazione del tipo:

$$x = c \qquad \text{oppure} \qquad y = a \circ x + b ,$$

con $a, b, c \in$ Q. Poiché Q è un quasicorpo destro, i punti e le rette di π costituiscono un piano di traslazione. Denotati con F_1 e F_2 i due fasci di rette parallele $x = \text{cost.}$ e $y = \text{cost.}$, la totalità delle rette di π che non appartengono a tali fasci, cioè quelle di equazioni:

$$y = a \circ x + b \quad , \quad a \in Q - 0 \, , \; b \in Q \, ,$$

sono i blocchi di una 2–rete $K_{2,q}(F_1, F_2)$, tracciata sul piano π (cfr. B. Segre [5], 20–5).

TEOREMA. – *La 2–rete* $K_{2,q}(F_1, F_2)$ *non è derivabile da un gruppo.*

Dimostrazione. – In base alla definizione di rete derivabile da un gruppo (cfr. [5], 20–3–11), per ottenere l'asserto basta provare l'esistenza di un blocco $f_0 \in K_{2,q}$, tale che l'insieme di sostituzioni su $Q = X$:

$$S = f_0^{-1} K_{2,q}$$

non sia un gruppo. Posto:

$$f_0 : \qquad y = x \, ,$$

consideriamo i due seguenti blocchi di $K_{2,q}$:

$$f' : \; y = a \cdot x^p + b \quad , \quad f'' : \; y = a' \cdot x^p + b' ,$$

ove $a, b, a', b' \in \gamma$ e $a \notin \gamma^*$, $a' \notin \gamma^*$. Indicate rispettivamente con g' e g'' le sostituzioni (su X) $f_0^{-1} f'$ e $f_0^{-1} f''$, supponiamo per assurdo che il prodotto $g' g''$ sia un elemento di S. Se x è un generico elemento di X, $g' g''$ associa ad esso l'elemento $a' \cdot a^p \cdot x^{p^2} + a' \cdot b^p + b'$, ove $a' \cdot a^p \in \gamma^*$, in quanto $\varphi(\gamma^*) = \gamma^*$. Dovrebbero dunque esistere due elementi $\alpha, \beta \in Q$, con $\alpha \in \gamma^*$, tali che, per ognuno dei q elementi di γ risulti:

$$\alpha \cdot x + \beta = a' \cdot a^p \cdot x^{p^2} + a' \cdot b + b' .$$

Da qui l'assurdo, poiché $q > p^2$.

3. COSTRUZIONE DI 3–RETI NON DERIVABILI DA UN GRUPPO. – Indicheremo nel seguito con K la 2–rete $K_{2,q}(F_1, F_2)$ considerata al N° 2 e con γ un campo finito d'ordine $q = p^h$, con $p \neq 2$, $h \geq 3$.

LEMMA. – *Sia* $\tilde{\gamma}$ *l'insieme ottenuto da* γ *mediante l'aggiunta del simbolo* ∞, *sottoposto ad opportune regole di composizione con gli elementi di* γ (3); *denotato con* I *l'insieme delle trasformazioni di* $\tilde{\gamma}$ *in sé di equazioni:*

$$(1) \qquad y = \frac{a_1 \cdot x^{p^{s(a)}} + a_2}{a_3 \cdot x^{p^{s(a)}} + a_4} \quad , \quad a_i \in \gamma \qquad (i = 1, 2, 3, 4) ,$$

con

$$a = \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \neq 0 \quad e \quad s(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \notin \gamma^* \\ 0 & \text{se } a \in \gamma^* \end{cases},$$

I *risulta strettamente 3–transitivo sugli elementi di* $\tilde{\gamma}$.

(3) Cfr. B. SEGRE [6], p. 129.

Dimostrazione. – Notiamo anzitutto che, se A è una matrice non degenere d'ordine 2 sopra γ e c un qualunque elemento non nullo di γ, risulta:

$$s(\det(c\mathrm{A})) = s(c^2 \det \mathrm{A}) = s(\det \mathrm{A}),$$

e quindi le equazioni (1) definiscono delle effettive trasformazioni di $\tilde{\gamma}$. Introduciamo i due seguenti insiemi di trasformazioni:

$$\mathrm{I}' = \left\{ y = \frac{a\cdot x + b}{c\cdot x + d} \Big/ a\cdot d - b\cdot c \in \gamma - 0 \right\},$$

$$\mathrm{I}'' = \left\{ y = \frac{a'\cdot x^p + b'}{c'\cdot x^p + d'} \Big/ a'\cdot d' - b'\cdot c' \in \gamma - 0 \right\},$$

e mostriamo che I′ ed I″ sono ambedue strettamente 3–transitivi su $\tilde{\gamma}$. Per l'insieme I′ tale proprietà è ben nota, trattandosi dell'insieme delle collineazioni della retta proiettiva sopra γ (cfr. B. Segre [5], 20–18–4). Le trasformazioni di I″ sono i blocchi di una rete del piano $\tilde{\gamma} \times \tilde{\gamma}$, isomorfa alla rete I′ nell'isomorfismo:

$$\sigma: \qquad (x\,,y) \rightarrow (x^p\,,y^p).$$

Poiché la proprietà di transitività è invariante per automorfismi (cfr. B. Segre [5] p. 77), anche I″ è strettamente 3–transitivo. Per ogni punto $(x\,,y)$ di $\tilde{\gamma} \times \tilde{\gamma}$ introduciamo le due matrici $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$, con che le trasformazioni di I sono le seguenti:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}\cdot \mathrm{X}^{p^{s(a)}} \qquad (a = \det \mathrm{A} \neq 0),$$

ove $\mathrm{X}^{p^{s(a)}} = \begin{pmatrix} x^{p^{s(a)}} \\ 1 \end{pmatrix}$ e il prodotto è quello ordinario di matrici. Per dimostrare la tesi del teorema occorre far vedere che, considerati $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, con $x_i \neq x_j$ e $y_i \neq y_j$ se $i \neq j$, esiste una, e una sola, trasformazione $f \in \mathrm{I}$, tale che $f(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, 3)$; se si pensano gli elementi di I come blocchi di una rete del piano $\tilde{\gamma} \times \tilde{\gamma}$, ciò equivale a provare che esiste ed è unico il blocco $f \in \mathrm{I}$ passante per i punti (a due a due indipendenti) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Per quanto sopra osservato esiste, ed è unica, la trasformazione $\mathrm{Y} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{X}$ di I′ che muta x_1, x_2, x_3 rispettivamente in $\infty, 0, 1$; analogamente esiste g: $\mathrm{Y} = \mathrm{B}\cdot\mathrm{X}$, tale che:

$$g(y_1) = \infty \quad , \quad g(y_2) = 0 \quad , \quad g(y_3) = 1\,.$$

Poiché gli elementi $\infty, 0, 1$ sono lasciati fissi dall'automorfismo φ, anche $\mathrm{Y} = \mathrm{A}^p\cdot\mathrm{X}^p$ manda x_1, x_2, x_3 in $\infty, 0, 1$. Essendo I′ e I″ strettamente 3–transitivi, sono uniche le trasformazioni $j' \in \mathrm{I}', j'' \in \mathrm{I}''$, tali che $j'(x_i) = y_i, j''(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, 3)$: d'altra parte i blocchi $\mathrm{Y} = \mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}$ e $\mathrm{Y} = \mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^p\cdot\mathrm{X}^p$, rispettivamente di I′ e di I″, passano per i punti (x_1, y_1), $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Risulta dunque:

$$j': \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}$$

$$j'': \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^p\cdot\mathrm{X}^p\,.$$

Posto $c = \det(B^{-1} \cdot A) = (\det B)^{-1} \cdot \det A = b^{-1} \cdot a$, $c' = \det(B^{-1} \cdot A^{p}) = b^{-1} \cdot a^{p}$, c e c' sono simultaneamente quadrati o non quadrati in γ. È quindi unica la trasformazione f di I che associa a x_1, x_2, x_3 rispettivamente y_1, y_2, y_3: precisamente, se $c, c' \in \gamma^*$, si ha $f = j'$, se $c, c' \notin \gamma^*$, $f = j''$.

TEOREMA. – *Considerato sul piano* $\tilde{\gamma} \times \tilde{\gamma}$ *l'insieme* K *dei blocchi:*

$$Y = A \cdot X^{p^{s(a)}},$$

con

$$a = \det A \neq 0 \qquad e \quad s(a) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a \in \gamma^* \\ 1 & \text{se} \quad a \notin \gamma^* \end{cases},$$

K *risulta una* 3-*rete* (*d'ordine* $n = q + 1$) *non derivabile da un gruppo.*

Dimostrazione. – In base al lemma precedente occorre solo provare che la 3-rete K non è derivabile da un gruppo. Se, per assurdo, esistesse un blocco $f \in K$, tale che $f^{-1} K = G$ fosse un gruppo di sostituzioni sugli elementi di $\tilde{\gamma}$, anche l'insieme $\bar{G}$ delle sostituzioni di G che lasciano fisso l'elemento ∞, sarebbe un gruppo; risulterebbe quindi derivabile da un gruppo la 2-rete $K'_{2,n-1}$ di ordine $n - 1$, che si ottiene da K imponendo il punto (∞, ∞), la quale contiene tutti e soli i blocchi di equazioni:

$$y = \frac{a_1}{a_4} \cdot x^{p^{s(a)}} + \frac{a_2}{a_4} \quad , \quad a_i \in \gamma \quad , \quad a = \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_4 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Da qui l'assurdo, in quanto $a_1 \cdot a_4^{-1}$ e $a = a_1 \cdot a_4$ sono simultaneamente quadrati o non quadrati in γ, e quindi $K'_{2,n-1}$ è isomorfa alla 2-rete $\bar{K}$, considerata al N° 2, che non è derivabile da un gruppo.

Dal teorema ora dimostrato, tenendo presente che una 3-rete immergibile è caratterizzata dall'essere derivabile dal gruppo delle omografie di una retta lineare sopra un campo di Galois, segue che K non è immergibile.

4. UNA GENERALIZZAZIONE DEI TEOREMI DEL N° 1 E DEL N° 2. – Denotiamo con φ_1 e φ_2 i due seguenti automorfismi di un campo finito γ d'ordine $q = p^h$ $(p \neq 2)$:

$$\varphi_1: \quad x \to x^{p^i}, \qquad \varphi_2: \quad x \to x^{p^{i+1}} \qquad (i \geq 0),$$

con la condizione che sia $i + 2 < h$, e definiamo in γ una nuova struttura moltiplicativa, ponendo:

$$a \circ b = \begin{cases} a \cdot b^{\varphi_1} & \text{se} \quad a \in \gamma^*, \\ a \cdot b^{\varphi_2} & \text{se} \quad a \notin \gamma^*, a \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad a = 0, \end{cases} \qquad a, b \in \gamma$$

ove $\cdot$ indica la moltiplicazione del campo e γ^* il sottogruppo moltiplicativo di $\gamma - 0$, costituito dagli elementi non nulli che sono quadrati in γ.

LEMMA. – $\gamma\,(+\,,\circ)$ *risulta un quasicorpo destro* Q', *non associativo, e, detto* π' *il piano di traslazione costruito su di esso,* π' *è collineare al piano* π, *relativo al quasicorpo* Q *definito al* N° 2, *secondo la collineazione:*

$$\tau:\qquad (x\,,y)\rightarrow(x^{p^i}\,,y^{p^i}).$$

Dimostrazione. – Q' è un gruppo rispetto a $+$, e inoltre:

$$a\circ 0=0\circ a=0\quad,\quad 1\circ a=a\circ 1=a\quad,\quad \forall\, a\in Q'.$$

Dimostriamo che Q' verifica gli assiomi dei quozienti. Considerati due elementi $a\,,b\in\gamma$, con $a\in\gamma^*$, l'equazione $a'\cdot\xi=b'$, ove $a'=a^{\varphi_1}$, $b'=b^{\varphi_1}$, ammette in γ una, e una sola, soluzione, data da $b'\cdot a'^{-1}$. Ne segue che l'equazione:

$$a\circ x=b$$

è univocamente risolubile in Q'; analogamente si procede se $a\notin\gamma^*$, sostituendo φ_2 al posto di φ_1. Per risolvere l'equazione:

$$y\circ a=b,$$

con a e b simultaneamente quadrati o non quadrati in γ, basta prendere y tale che $y\cdot a^{\varphi_1^{-1}}=b^{\varphi_1^{-1}}$; se invece $a\in\gamma^*$ e $b\notin\gamma^*$, oppure $a\notin\gamma^*$ e $b\in\gamma^*$, y deve essere soluzione dell'equazione in γ: $y\cdot a^{\varphi_2^{-1}}=b^{\varphi_2^{-1}}$.

Proviamo ora la proprietà distributiva a destra. Siano $a\,,b\,,c\in Q'$:

$$a\circ(b+c)=a\cdot(b+c)^{\varphi_1}=a\cdot(b^{\varphi_1}+c^{\varphi_1})=a\circ b+a\circ c,\qquad \text{se}\quad a\in\gamma^*,$$

$$a\circ(b+c)=a\cdot(b+c)^{\varphi_2}=a\cdot(b^{\varphi_2}+c^{\varphi_2})=a\circ b+a\circ c,\qquad \text{se}\quad a\notin\gamma^*.$$

Poiché si è supposto $i+2<h$, l'automorfismo di γ:

$$\varphi:\qquad x\rightarrow x^{p^{i+2}}$$

è diverso dall'identità: esiste quindi un elemento $c\in\gamma$, tale che $c^{p^{i+2}}\neq c$. Presi $a\,,b\in\gamma-0$, con $a\notin\gamma^*$ e $b\notin\gamma^*$, si ha:

$$a\circ(b\circ c)=a\circ(b\cdot c^{p^{i+1}})=a\cdot b^{p^{i+1}}\cdot c^{p^{2i+2}},$$

$$(a\circ b)\circ c=(a\cdot b^{p^{i+1}})\circ c=a\cdot b^{p^{i+1}}\cdot c^{p^i},$$

e quindi $a\circ(b\circ c)\neq(a\circ b)\circ c$, in quanto $c^{p^{2i+2}}\neq c^{p^i}$. Q' è dunque non associativo.

Per dimostrare la seconda parte del lemma basta osservare che, se i punti $(x_1\,,y_1)\,,(x_2\,,y_2)\,,(x_3\,,y_3)$ sono contenuti in una retta di π avente equazione (indichiamo qui con $\times$ la moltiplicazione di Q):

$$y=a\times x+b,\qquad\qquad a\,,b\in Q\,,$$

con $a\in\gamma^*$, allora i loro trasformati secondo τ giacciono sulla retta di π':

$$y=a'\circ x+b'\,,$$

ove $a' = \varphi_1(a) = a^{p^i}$ e $b' = \varphi_1(b) = b^{p^i}$. Analogamente se $a \notin \gamma^*$, sostituendo φ_2 al posto di φ_1. È chiaro che, se tre punti di π sono situati su una retta del tipo $x = c$, i loro trasformati in π' appartengono alla retta $x = c^{p^i}$. In modo del tutto simile si dimostra che τ^{-1} trasforma punti allineati di π' in punti allineati in π.

Denotati con F'_1 e F'_2 i due fasci di rette parallele (del piano π') $x = \text{cost.}$ e $y = \text{cost.}$, le rette di π' che non appartengono a tali fasci costituiscono i blocchi di una 2-rete $K'_{2,q}(F'_1, F'_2)$.

TEOREMA. – *La 2-rete* $K'_{2,q}(F'_1, F'_2)$ *è isomorfa a* $\bar{K}$.

Dimostrazione. – In base alla definizione di isomorfismo fra t-reti (cfr. B. Segre [5], 20-3-14), per dimostrare l'asserto, basta provare che esistono due blocchi $h' \in K'$ e $\bar{h} \in \bar{K}$, tali che:

$$K' = h'S \ , \ \bar{K} = \bar{h}\, S \,, \tag{2}$$

con S insieme di sostituzioni su γ. Posto h': $y = x^{p^i}$ e $\bar{h}$: $y = x$, risulta:

$$h'^{-1} K' = \bar{h}^{-1} \bar{K} \,,$$

e quindi si soddisfa alla (2) prendendo $S = h'^{-1} K' = \bar{h}^{-1} \bar{K}$.

Dal teorema ora dimostrato segue che la 2-rete $K'_{2,q}(F'_1, F'_2)$ non è derivabile da un gruppo.

$K'_{2,q}(F'_1, F'_2)$ può essere ampliata nella 3-rete del piano $\tilde{\gamma} \times \tilde{\gamma}$, i cui blocchi hanno equazioni:

$$Y = A \cdot X^{\varphi_{i(a)}} \,, \qquad a = \det A \neq 0,$$

con $i(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in \gamma^* \\ 2 & \text{se } a \notin \gamma^* \end{cases}$. È immediato verificare che la 3-rete così ottenuta è isomorfa a quella definita nel N° 3.

La questione dell'esistenza di t-reti non derivabili da un gruppo, per $t \geq 4$, non è stata ancora risolta (cfr. B. Segre [5], 20-7-2); in base ad un noto teorema di Jordan sui gruppi 4-transitivi di sostituzioni, l'unica 4-rete derivabile da un gruppo è quella associata al gruppo di Mathieu M_{11}. Se quindi a tale problema si desse risposta negativa, cioè se ogni $K_{t,n}$, con $t \geq 4$, fosse necessariamente derivabile da un gruppo, l'intero n dovrebbe soddisfare alla limitazione:

$$n \leq t + 7.$$

In [3] trovasi dimostrato che, se esiste qualche $K_{t,n}$, derivabile o no da un gruppo, tale che $4 \leq t \leq n - 3$, allora deve aversi:

$$n - t \equiv \pm 1 \qquad (\text{mod } 6).$$

Bibliografia.

[1] André J., *Ueber nicht desarguesche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, «Math. Zeitschrift.», Bd. 60 (1954).

[2] Ceccherini P. V., *Alcune osservazioni sulla teoria delle reti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *40*, 218–221 (1966).

[3] Pedrini C., *Gruppi transitivi di sostituzioni e t–reti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *40*, 226–232 (1966).

[4] Pierce W. A., *Moulton Planes*, «Canad. J. of Math.», 427–438 (1961).

[5] Segre B., *Lezioni di istituzioni di geometria superiore per l'anno accademico 1963–64* (raccolte dal dott. P. V. Ceccherini) Vol. III. Ist. Mat. Università di Roma (1965).

[6] Segre B., *Lectures on modern geometry* (with an appendix of L. Lombardo–Radice). Cremonese, Roma (1961).