Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Lippi

Sugli elementi uniti nelle collineazioni dei piani liberi e dei piani aperti. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.3, p. 379–384.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_3_379_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Geometria. — *Sugli elementi uniti nelle collineazioni dei piani liberi e dei piani aperti.* Nota II di MARCO LIPPI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this "Nota II", which is the continuation of a "Nota I" with the same title published on p. 233 of these « Rendiconti », it is shown that the maximal projective subplanes of an open plane are infinitely generated. It is then deduced that, if a collineation of an open plane has period 2^i, then the subplane formed by its fixed elements is infinitely generated.

La presente « Nota II » fa seguito alla « Nota I » con lo stesso titolo, uscita nel precedente fascicolo di questi « Rendiconti » (pp. 233–237).

Nel n. 1 dimostrerò, come già annunciato nella « Nota I », che i sottopiani massimali dei piani aperti non sono finitamente generati. Il n. 2 sarà dedicato alla caratterizzazione delle collineazioni di periodo finito di un piano libero finitamente generato come quelle stazionarie rispetto ad un generatore libero finito. Nel n. 3 mi occuperò della determinazione di un generatore libero del sottopiano di un π^n costituito dai punti e dalle rette mutati in sé da f^{2^i}, essendo f una fissata collineazione di periodo finito. Nel n. 4, infine, dimostrerò alcuni teoremi sulla determinazione dei tipi possibili per il sottopiano degli elementi uniti delle collineazioni di periodo finito dei piani liberi finitamente generati. Darò ivi inoltre la dimostrazione del teorema annunciato nella « Nota I » sulle collineazioni di periodo 2^i dei piani aperti. La numerazione dei lemmi e dei teoremi è la continuazione di quella della « Nota I», alla quale vanno anche riferite le indicazioni bibliografiche.

1. Indicherò talvolta l'unione dei piani parziali $M^1, M^2, \cdots, M^t$ con $(M^1, M^2, \cdots, M^t)$.

LEMMA 10. – *Sia π un piano proiettivo non finitamente generato e σ denoti un suo sottopiano proiettivo finitamente generato. Esiste allora un sottopiano finitamente generato di π che contiene propriamente σ.*

Dimostrazione. – Sia σ generato dal suo sottopiano parziale finito M. Se P è un punto di π fuori di σ, il sottopiano di π generato da (M , P) è finitamente generato e contiene propriamente σ, onde l'asserto. Ne consegue tosto il

COROLLARIO. – *Nessun sottopiano proiettivo massimale di π è finitamente generato.*

LEMMA 11. – *Sia π^m contenuto propriamente in π^n. Esiste allora un π^{m+1} contenuto propriamente in π^n e contenente propriamente π^m.*

(*) Nella seduta del 12 marzo 1966.

Dimostrazione. – Si denoti con A_n un generatore libero di π^n e sia π^m generato liberamente da A_m. A_m si componga della retta r, i punti $P_1, P_2 \cdots P_{m-2}$ sulla r e i punti Q_1 e Q_2 fuori della r e tali che $Q_1 + Q_2$ non sia incidente con alcuno dei P_i. Se P^0 denota un punto di r non contenuto in π^m, sia N^0 una estensione libera finita di A_n contenente A_m, P^0 e le rette $q_1 = P_1 + Q_1$, $q_2 = P_1 + Q_2$. Indicato con M^0 il completamento di A_m entro N^0, si ha che M^0 contiene q_1 e q_2, ma non contiene P^0. Inoltre, M^0 è completo in N^0 e quindi, per il lemma 8, è un generatore libero di π^m. Posto $t_1^1 = P^0 + Q_1$, $t_2^1 = P^0 + Q_2$; $S_1^1 = q_1 \cdot t_2^1$, $S_2^1 = q_2 \cdot t_1^1$; $z^1 = S_1^1 + S_2^1$; $P^1 = z^1 \cdot r$; $N^1 = (N^0, t_1^1, t_2^1, S_1^1, S_2^1, z^1, P^1)$, si verifica facilmente che N^1 è una estensione libera di N^0. Inoltre, per il lemma 7, M^0 è completo in N^1. Non è escluso che $N^1 = N^0$, nel qual caso le aggiunzioni fatte ad N^0 non sono effettive.

La costruzione eseguita per ottenere N^1 da N^0 si può ripetere a partire da N^1 utilizzando il punto P^1 invece di P^0, e ancora P_1, Q_1 e Q_2. È chiaro allora cosa debba intendersi con: t_1^k, t_2^k; S_1^k, S_2^k; z^k; P^k; N^k. Evidentemente N^k è una estensione libera di N^{k-1} ed M^0 è completo in N^k. I punti $P^1, P^2, \cdots, P^k$, essendo generati liberamente dallo A_4 costituito da P^0, P_1, Q_1, Q_2 ed r, ed essendo di differenti stati rispetto a tale A_4, sono a due a due distinti. D'altra parte, N^0 è finito: esiste allora un intero $h > 0$ tale che P^h non è contenuto in N^0 mentre $P^1, P^2, \cdots, P^{h-1}$ sono contenuti in N^0. Ciò significa che, nella costruzione di N^h da N^{h-1}, il punto P^h viene aggiunto effettivamente. Esistono dunque esattamente due rette di N^h incidenti con P^h (si ricordi che N^{h-1} è un generatore libero di π^n) e tali rette sono la z^h e la r.

Si costruisca ora N^{h+1}. Le rette t_1^{h+1} e t_2^{h+1} debbono essere aggiunte effettivamente per quanto si è osservato su P^h e per il fatto che z^h non può coincidere con alcuna di esse. Dunque tali rette contengono in N^h solo due punti. Ma allora sono effettive aggiunzioni quelle dei punti S_1^{h+1} ed S_2^{h+1}. Ragionando analogamente si vede che z^{h+1} è aggiunta effettivamente e quindi contiene, in N^{h+1}, i soli punti S_1^{h+1}, S_2^{h+1} e P^{h+1} che è incidente, in N^{h+1}, solo con z^{h+1} ed r. Si ponga $M^1 = (M^0, P^{h+1})$. M^1 contiene propriamente M^0 ed è contenuto propriamente in N^{h+1}. D'altra parte, π^n è generato liberamente da N^{h+1} e π^m è generato liberamente da M^0. Inoltre M^0, essendo completo in N^{h+1}, è completo in M^1.

Per concludere, basterà dimostrare che M^1 è completo in N^{h+1} ed applicare il lemma 8. Le rette di M^1 sono rette di M^0. È sufficiente allora provare che, se la retta s unisce due punti distinti, T^1 e T^2, di M^1, s è in M^1. Se $T^1 \neq P^{h+1} \neq T^2$ il fatto è ovvio, trattandosi di punti di M^0. Sia $T^1 = P^{h+1}$. Per P^{h+1} passano, in N^{h+1}, soltanto z^{h+1} ed r. D'altra parte, come si è visto, z^{h+1} contiene, in N^{h+1}, solo i punti S_1^{h+1} e S_2^{h+1} oltre a P^{h+1}, e questi ultimi non sono in M^1. Dunque T^2 giace su r, e quindi $s = r$. Si verifica poi immediatamente che $r(M^1) = r(M^0) + 1$, onde l'asserto. Ne consegue tosto il

COROLLARIO. – *I sottopiani proiettivi massimali di un π^n non sono finitamente generati.*

I risultati fin qui ottenuti sono riassunti dal seguente:

TEOREMA 6. – *Nessun sottopiano proiettivo massimale di un piano proiettivo aperto π è finitamente generato.*

Dimostrazione. – Se π è un piano proiettivo aperto non finitamente generato, basta applicare il corollario del lemma 10 per concludere. Se π è finitamente generato, per il teorema 5, è un π^n; basta allora applicare il corollario del lemma 11.

2. Sia π^n generato liberamente dal suo sottopiano parziale finito M. Dirò che la collineazione f di π^n è stazionaria rispetto ad M se $f(M) = M$. Insisto sul fatto che, nella precedente definizione, si richiede che M sia un generatore libero finito. La definizione del Dembowski ([3]) di collineazione stazionaria coincide con la precedente, a prescindere dalla condizione di finitezza qui imposta ad M. Si noti che, sebbene π^n sia finitamente generato, tale condizione non è automaticamente soddisfatta in quanto π^n può contenere generatori liberi infiniti; si dànno facilmente esempi di sottopiani parziali propri infiniti di π^n che generano π^n liberamente.

Si verifica senza difficoltà che, se f è stazionaria rispetto ad M, $s_M(f(x)) = s_M(x)$.

TEOREMA 7. – *Una collineazione di π^n è stazionaria se, e solo se, essa ha periodo finito.*

Dimostrazione. – Sia f stazionaria rispetto ad M. Poiché M è finito, il periodo della restrizione ad M della f è finito. Si denoti con h tale periodo. La restrizione di f^h ad M è l'identità, e dunque, per il teorema 1, f è l'identità su tutto π^n. Viceversa, se f ha periodo h finito ed M è un generatore libero finito di π^n, si denoti con N il minimo generatore libero di π^n contenente $\bigcup_{j=0}^{h-1} f^j(M)$. N, per il lemma 5, è finito; inoltre, per il lemma 6, $f(N)$ è il minimo generatore libero di π^n contenente $\bigcup_{j=0}^{h-1} f^{j+1}(M) = \bigcup_{j=0}^{h-1} f^j(M)$. Quindi $f(N) = N$.

Il teorema 7 mette in luce il fatto che, se f è una collineazione di periodo finito di π^n, ad ogni generatore libero finito di quest'ultimo resta associato un generatore libero finito rispetto a cui f è stazionaria. Considerazioni simili alle precedenti potrebbero svilupparsi per una collineazione di π^n di periodo non necessariamente finito, le quali, tuttavia, non avrebbero interesse ai fini del presente lavoro.

3. Sia ora f una collineazione di π^n di periodo h finito, stazionaria rispetto al generatore libero finito M, e si denoti con k un numero intero positivo. Indicherò con M_k^f la totalità degli elementi di M mutati ciascuno in sè dalla f^k.

x appartiene ad M_k^f se, e solo se, appartiene ad un'orbita della f la cui lunghezza sia un divisore di k. D'altra parte, tale lunghezza è un divisore del periodo h della f; quindi, indicato con t il massimo comun divisore di h e k, si ha $M_k^f = M_t^f$. Perciò, nel seguito sarà lecito fare l'ipotesi – sempre sottintesa – che nel simbolo M_k^f k indichi un divisore di h.

LEMMA 12. – *M_k^f è completo in* M.

Dimostrazione. – Se x è una retta di M incidente coi punti y e z di M_k^f, si ha $f^k(x) = f^k(y+z) = f^k(y) + f^k(z) = y + z = x$; quindi x appartiene ad M_k^f. Poiché vale anche il risultato duale, il lemma è dimostrato.

Sia $h = 2^j l$, con $l \not\equiv 0 \pmod 2$. Si consideri $M_{2^j}^f$. Poiché nel seguito si esaminerà solo questo caso, si ponga $M^f = M_{2^j}^f$. M^f è completo in M; dunque, per il lemma 8, il piano $[M^f]_{\pi^n}$ è generato liberamente da M^f. Indicheró nel seguito tale sottopiano di π^n con $(\pi^n)^f$.

LEMMA 13. – *Sia f stazionaria rispetto ad* M, *di periodo h, con $h = 2^j l$*, $l \not\equiv 0 \pmod 2$. *x è un elemento di $(\pi^n)^f$ se, e solo se, $f^{2^j}(x) = x$.*

Dimostrazione. – Se x è un elemento di $(\pi^n)^f$, poiché f^{2^j} è l'identità su M^f e quindi, per la ii) del teorema 1, su $(\pi^n)^f$, si ha $f^{2^j}(x) = x$.

Viceversa, sia $f^{2^j}(x) = x$. Se $s_M(x) = 0$, x è un elemento di M^f e quindi di $(\pi^n)^f$. Supposto vero l'asserto per gli elementi di π^n di M–stadio $< k$, sia x di M–stadio k. Siano y e z di M–stadio $< k$ incidenti con x. Si supponga, per fissare le idee, che x sia una retta. Si ha:

$$x = y + z \quad ; \quad x = f^{2^j}(x) = f^{2^j}(y+z) = f^{2^j}(y) + f^{2^j}(z).$$

La f, essendo stazionaria rispetto ad M, conserva lo M–stadio di x, y e z. D'altra parte, y e z sono gli unici elementi di π^n di M–stadio $< k$ incidenti con x. Dunque, o: 1) $f^{2^j}(y) = y$, $f^{2^j}(z) = z$, oppure: 2) $f^{2^j}(y) = z$, $f^{2^j}(z) = y$. Nel caso 2) si avrebbe $f^{2^{2j}}(y) = y$, $f^{2^{2j}}(z) = z$; ma ciò è assurdo, poiché la 2) ed il significato di j implicano che le lunghezze delle orbite di y e z contengano fattori primi diversi da 2. Dunque deve valere la 1). Per l'ipotesi induttiva, ciò implica che y e z siano elementi di $(\pi^n)^f$ e quindi che x, essendo incidente con y e z, sia elemento di $(\pi^n)^f$, come asserito.

Col lemma 13 si è implicitamente provato che $(\pi^n)^f$ è indipendente dalla scelta del generatore libero rispetto a cui f è stazionaria. Naturalmente $(\pi^n)_f$, ossia il sottopiano degli elementi uniti della f, è contenuto in $(\pi^n)^f$. Si ha cioè:

LEMMA 14. – $(\pi^n)_f \subseteq (\pi_n)^f$.

A_5 denoti il piano parziale costituito dai punti P_1, P_2, P_3 sulla retta r, Q_1 e Q_2 fuori di r; inoltre f designi la collineazione del π^5 generato liberamente da A_5, assegnata mediante la collineazione di A_5 in sè che lascia r fissa, scambia Q_1 con Q_2 e permuta ciclicamente i punti P_1, P_2, P_3. La f ha periodo 6, ed è stazionaria rispetto ad A_5. $(A_5)^f$ è costituito dai punti Q_1 e Q_2 e dalla retta r. $(A_5)^f$ genera, entro π^5, il sottopiano degenere $(\pi^5)^f$ costituito dai punti Q_1, Q_2 e $(Q_1 + Q_2)\cdot r$ e dalle rette r e $Q_1 + Q_2$. Gli elementi uniti della f contenuti in $(\pi^5)^f$ sono r, $Q_1 + Q_2$, *e* $(Q_1 + Q_2)\cdot r$; per il lemma 14, essi sono i soli elementi uniti della f. Si ha così un esempio di *collineazione di un piano proiettivo infinito in cui il numero dei punti uniti è diverso da quello delle rette unite.* Invece, nel caso di un piano proiettivo finito, il numero dei punti uniti e quello delle rette unite coincidono sempre fra loro in virtù di un teorema del Baer ([2]).

4. TEOREMA 8. – *Sia f una collineazione di periodo dispari di π^n, stazionaria rispetto al generatore libero finito* M. *Allora:*

i) $(\pi^n)^f = (\pi^n)_f$,

ii) $(\pi^n)_f$, *se è degenere, è necessariamente finito,*

iii) $(\pi^n)_f$, *se è un sottopiano proiettivo, è finitamente generato.*

Dimostrazione. – Se il periodo della f è dispari non esistono punti appartenenti ad orbite della f di lunghezza 2^j, con $j \neq 0$; la i) è così provata. $(\pi^n)_f$ possiede un generatore libero finito: M^f. Dunque, se M^f non è completo e $(\pi^n)_f$ è degenere, per il lemma 2, $(\pi^n)_f$ è necessariamente finito. D'altra parte, i sottopiani finiti dei piani aperti sono degeneri e dunque, se M^f è completo, $(\pi^n)_f = M^f$ è degenere e finito. Infine $(\pi^n)_f$, se è un sottopiano proiettivo di π^n, è finitamente generato da M^f. Restano così provate la ii) e la iii).

TEOREMA 9. – *Sia f una collineazione di π^n di periodo p^s, con p numero primo dispari. Se $(\pi^n)_{f^{p^j}}$, per $j \leq s$, non è degenere, allora $(\pi^n)_{f^{p^j}} = \pi^m$ con $m \equiv n$ (mod p^{j+1}).*

Dimostrazione. – Sia M un generatore libero finito di π^n tale che $f(M) = M$ e quindi $f^{p^j}(M) = M$. Per la i) del teorema 8, $M^{f^{p^j}}$ è un generatore libero finito di $(\pi^n)_{f^{p^j}}$. Si ha, per il teorema 4, che $r(M) = n+4$ e che $r(M^{f^{p^j}}) = m + 4$. D'altra parte, essendo $M^{f^{p^j}}$ contenuto in M, si ha $r(M) = m + 4 + l$, ove $m + 4$ è il contributo dei punti, delle rette e delle bandiere di $M^{f^{p^j}}$ ed l quello dei punti delle rette e delle bandiere che non sono in $M^{f^{p^j}}$ (manifestamente, la bandiera (P, r) non è in $M^{f^{p^j}}$ se P o r non sono in $M^{f^{p^j}}$). Sia $\mathfrak{S}$ l'insieme dei punti di M ed $\mathfrak{R}$ l'insieme dei punti che non sono in $M^{f^{p^j}}$. f induce in $\mathfrak{S}$ una permutazione di periodo p^t, con $t \leq s$. I punti di $\mathfrak{R}$, non essendo uniti rispetto alla f^{p^j}, appartengono ad orbite della f di lunghezza almeno p^{j+1}. Dunque $|\mathfrak{R}| \equiv 0$ (mod p^{j+1}). Poiché un discorso analogo può farsi per le rette e, di conseguenza, per le bandiere, si ha $l \equiv 0$ (mod p^{j+1}), e dunque $n + 4 \equiv r(M) \equiv m + 4 + l \equiv m + 4$ (mod p^{j+1}), onde l'asserto.

TEOREMA 10. – *Sia π un piano proiettivo aperto ed f denoti una sua collineazione di periodo 2^j ($j > 0$). π_f è allora un sottopiano proiettivo di π non finitamente generato.*

Dimostrazione. – Se $j = 1$, π_f è un sottopiano proiettivo massimale di π, in virtù del citato teorema di Baer e del fatto che π non possiede omologie in quanto non contiene configurazioni di Desargues (che sono piani parziali irriducibili). Inoltre, tale sottopiano, essendo massimale, non è finitamente generato in virtù del teorema 5. Si supponga vero il teorema per $j = h - 1$ ed f denoti una collineazione di periodo 2^h. La f^2 ha periodo 2^{h-1}, dunque π_{f^2} è un sottopiano proiettivo di π non finitamente generato, come segue dall'ipotesi induttiva. f lascia fisso globalmente π_{f^2}; inoltre $\pi_f \subseteq \pi_{f^2}$. La f, ristretta a π_{f^2}, ha periodo 2; dunque, poiché π_{f^2} è un piano proiettivo aperto, π_f è un sottopiano proiettivo non finitamente generato di π_{f^2} e quindi di π.

TEOREMA 11. – *Sia f una collineazione di periodo pari di π^n, stazionaria rispetto ad* M. *Allora:*

i) *se $(\pi^n)_f$ è degenere anche $(\pi^n)^f$ è degenere, e viceversa;*

ii) *$(\pi^n)_f$, se è degenere, è necessariamente finito;*

iii) *$(\pi^n)_f$, se è un sottopiano proiettivo di π^n, non è finitamente generato.*

Dimostrazione. – $(\pi^n)_f$ è il sottopiano degli elementi uniti della f ristretta a $(\pi^n)^f$. Se $(\pi^n)^f$ non è degenere, ed è dunque un sottopiano proiettivo di π^n, allora, tenuto conto del fatto che la f ristretta a $(\pi^n)^f$ ha periodo 2^j, del fatto che $(\pi^n)^f$ è un piano proiettivo aperto e del teorema 10, si ha che $(\pi^n)_f$ è un sottopiano proiettivo non finitamente generato di $(\pi^n)^f$, e quindi di π^n. Ciò implica che, se $(\pi^n)_f$ è degenere, anche $(\pi^n)^f$ è degenere. D'altra parte, se $(\pi^n)^f$ è degenere, tale è anche $(\pi^n)_f$. Restano così provate la i) e la iii). Se $(\pi^n)_f$ è degenere, tale è anche $(\pi^n)^f$ per la i). Poiché $(\pi^n)^f$ è generato liberamente da M^f, che è finito, ragionando come nel teorema 8 si prova che $(\pi^n)^f$ è finito. Ma allora tale è anche $(\pi^n)_f$, onde la ii).

Tenendo conto della ii) del teorema 8 e della ii) del teorema 11, e del fatto che i sottopiani finiti dei piani aperti sono degeneri, si ottiene senz'altro il

TEOREMA 12. – *Il sottopiano degli elementi uniti di una collineazione di periodo finito di un π^n è degenere se, e soltanto se, esso è finito.*

Va rilevato che il presente lavoro non dà risposta esauriente al problema della determinazione del sottopiano degli elementi uniti nelle collineazioni dei piani liberi finitamente generati, in quanto questi posseggono collineazioni di periodo non finito ([3]).