Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Tallini Scafati

Sui $\{k, n\}$-archi di un piano grafico finito

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.3, p. 373–378.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_3_373_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Geometria. — *Sui $\{k , n\}$-archi di un piano grafico finito.* Nota di MARIA TALLINI SCAFATI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In a finite irreducible graphic plane, a $\{k , n\}$-arc is a set K of k points no $n+1$ of which are collinear and containing n collinear points. Denoting by t_s $(s = 0, 1, \cdots, n)$ the number of s-secant lines of K, we establish a relation connecting the integers t_s independent from the two equations already known. Moreover we prove that, if $q > 4$, every $\{k , 3\}$-arc admits some exterior line (i.e. some 0-secant) i.e. $t_0 > 0$, and we obtain a lower bound for t_0. If $2 < q \leq 4$, we determine all the $\{k , 3\}$-arcs free from exterior lines. Finally, we apply these results to the cubic of a Galois plane.

1. Sia π_q un piano grafico irriducibile finito, di ordine q, [5] cap. 14. In π_q definiscesi *$\{k , n\}$-arco un insieme di k punti di cui mai $n + 1$ risultino allineati e che contenga n punti allineati* [1], [2]. Per $n = 2$ si ottiene così la nozione di k-arco, [5] n. 173. Si noti poi che un qualsiasi insieme che contenga tutti i punti di una retta è un $\{k , q+1\}$-arco; perciò nel seguito supporremo sempre $n \leq q$ ed inoltre, per evitare casi banali, $q > 2$.

Dato un $\{k , n\}$-arco K, denoteremo con t_s $(s = 0 , 1 , \cdots, n)$ il numero complessivo delle rette s-secanti di K, cioè delle rette che incontrano K esattamente in s punti. Per gli interi t_s valgono le seguenti relazioni, tra loro indipendenti:

$$\sum_{s=0}^{n} t_s = q^2 + q + 1, \tag{1}$$

$$\sum_{s=2}^{n} s(s-1)\, t_s = k(k-1), \tag{2}$$

$$\sum_{s=1}^{n} s t_s = k(q+1). \tag{3}$$

La (1) è evidente. La (2) trovasi dimostrata in [2], n. 1. La (3) si prova applicando il criterio delle coppie – introdotto da B. Segre in [6], n. 10 – qualora si osservi che i due membri della (3) esprimono in due modi diversi il numero delle coppie costituite da un punto del $\{k , n\}$-arco e da una retta di π_q che si appartengono.

Osserviamo che non esiste un'altra relazione a cui soddisfino le t_s, per k ed n arbitrari, analoga cioè alle (1), (2), (3), ma da esse indipendente. Infatti, in caso contrario, per $n = 3$, due $\{k , 3\}$-archi, con lo stesso numero k di punti, avrebbero gli stessi caratteri t_s, mentre ciò non è, come mostra il seguente esempio. In un piano di Galois $S_{2,q}$, q dispari, il $\{q + 2 , 3\}$-arco costituito dai punti di una conica irriducibile e da un punto esterno ad essa (cioè da cui

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

escono due tangenti) è tale che per esso si ha: $t_3 = (q-1)/2$; mentre per il $\{q+2, 3\}$–arco costituito dai punti di una conica irriducibile e da un punto interno (cioè da cui non escono tangenti alla conica) risulta $t_3 = (q+1)/2$. Altri esempi potrebbero facilmente ottenersi in guisa analoga.

Nel n. 2, relativamente ai $\{k, 3\}$–archi K di π_q, dimostreremo (facendo uso delle (1), (2), (3), nelle quali si faccia $n = 3$) che, se $q > 4$, esistono sempre rette esterne (cioè 0–secanti) rispetto a K, e daremo una limitazione inferiore per t_0. Per $q \leq 4$ determineremo tutti i $\{k, 3\}$–archi privi di rette esterne.

Nel n. 3, mostreremo che in un piano di Galois $S_{2,q}$, se è $q > 7$, ogni cubica irriducibile è un $\{k, 3\}$–arco; e che, per ogni $q \leq 7$, esistono cubiche irriducibili che non sono $\{k, 3\}$–archi (bensì k–archi). Poggiando sui risultati del n. 2, perverremo infine ad un'ulteriore limitazione inferiore per t_0 e quindi, in virtù delle (1), (2), (3), nelle quali si faccia $n = 3$, a delle limitazioni per le varie t_s.

2. In questo numero ci occuperemo dei $\{k, 3\}$–archi di $\pi_q\,(q > 2)$, in relazione al problema dell'esistenza di rette esterne. Attualmente il sistema delle equazioni (1), (2), (3) del n. 1 si può scrivere nella forma:

$$
(4) \qquad \begin{cases} t_1 = k(k-4q-5)/2 + 3(q^2+q+1-t_0)\,, \\ t_2 = k(3q-k+4) - 3(q^2+q+1-t_0)\,, \\ t_3 = k(k-2q-3)/2 + (q^2+q+1-t_0)\,. \end{cases}
$$

In $\pi_3 = S_{2,3}$ siano $\mathcal{C}$ una conica non degenere, a_1 una sua tangente in un punto Q_1, a_2 una sua retta esterna e Q_2 un punto di a_2 esterno a $\mathcal{C}$ (cioè da cui escono due tangenti a $\mathcal{C}$). Gli insiemi $(\mathcal{C}-Q_1)\cup(a_1-Q_1)$ e $\mathcal{C}\cup(a_2-Q_2)$ sono rispettivamente un $\{6, 3\}$–arco ed un $\{7, 3\}$–arco che denoteremo con $K'_{3,6}$ e $K''_{3,7}$. Essi sono manifestamente privi di rette esterne.

In $\pi_4 = S_{2,4}$ si consideri un sottopiano d'ordine 2; esso costituisce evidentemente un $\{7, 3\}$–arco, privo di rette esterne, che denoteremo con $K'_{4,7}$. Si considerino poi tre punti indipendenti A_1, A_2, A_3 di $S_{2,4}$ e si ponga $a_k = A_i A_j$ $(i, j, k$ permutazione di $1, 2, 3)$; l'insieme $a_1 \cup a_2 \cup a_3 - (A_1, A_2, A_3)$ è un $\{9, 3\}$–arco privo di rette esterne, che denoteremo con $K''_{4,9}$.

Ebbene, ci proponiamo di dimostrare che, ad esclusione dei precedenti archi $K'_{3,6}$, $K''_{3,7}$, $K'_{4,7}$, $K''_{4,9}$, ogni $\{k, 3\}$–arco di π_q ammette qualche retta esterna, ed anzi determineremo una limitazione per il carattere t_0 del $\{k, 3\}$–arco.

Sia m il massimo numero di rette 1–secanti di un $\{k, 3\}$–arco K di π_q uscenti da un suo punto P, al variare di P in K. Si ha allora:

$$
(5) \qquad k \leq 2(q+1-m)+1.
$$

Posto

$$
(6) \qquad k = 2q+3-2m-l\,,
$$

per la (5) è:

$$
(7) \qquad l \geq 0\,.
$$

Sia a una 3-secante di K. Denotato con u_s^i $(s = 0, 1, 2, 3)$ il numero delle s-secanti di K per un punto Q_i di $a - K \cap a$ $(i = 1, 2, \cdots, q-2)$, risulta:

$$\begin{cases} 3u_3^i + 2u_2^i + u_1^i = k, \\ u_3^i + u_2^i + u_1^i + u_0^i = q + 1, \end{cases}$$

e quindi, per la (6):

$$u_1^i = u_3^i - 1 + 2m + l - 2u_0^i. \tag{8}$$

Se t'_h $(h = 1, 3)$ denota il numero complessivo delle rette h-secanti di K, non passanti per nessuno dei tre punti di $K \cap a$, si ha manifestamente

$$t'_1 = \sum_{i=1}^{q-2} u_1^i \quad , \quad t'_3 = \sum_{i=1}^{q-2} (u_3^i - 1) \quad , \quad t_0 = \sum_{i=1}^{q-2} u_0^i .$$

Sommando le (8) a membro a membro rispetto ad i da 1 a $q-2$, si ha allora:

$$t'_1 = t'_3 + (2m + l)(q-2) - 2t_0. \tag{9}$$

Poiché per ogni punto di K passano al più m rette 1-secanti di K, risulta $t'_1 \leq m(k-3)$, cioè (per la (9) e tenuto conto della (6)):

$$2m(m-2) + l(m+q-2) + t'_3 \leq 2t_0. \tag{10}$$

Essendo $l(m+q-2) \geq 0$ e $t'_3 \geq 0$, si ha:

$$t_0 \geq m(m-2). \tag{11}$$

Se $m \geq 3$, la (11) assicura l'esistenza di qualche retta esterna a K, qualunque sia q.

Proveremo ora che, se $q > 4$, anche per $m = 0, 1, 2$, l'arco K ammette qualche retta esterna e, per $q \leq 4$, mostreremo che gli unici $\{k, 3\}$-archi privi di rette esterne coincidono con i $\{k, 3\}$-archi precedentemente denotati con $K'_{3,6}$, $K''_{3,7}$, $K'_{4,7}$, $K''_{4,9}$.

Per $m = 0$, la (10) diventa:

$$l(q-2) + t'_3 \leq 2t_0; \tag{10'}$$

se fosse $t_0 = 0$, per la (10′) sarebbe $l = t'_3 = 0$, e quindi, per la (6), $k = 2q + 3$. Per tale valore di k il sistema (4) fornirebbe $t_0 = q(q-2)/2 > 0$, il che è assurdo; dunque ogni $\{k, 3\}$-arco, con $m = 0$, deve ammettere almeno una retta esterna, qualunque sia $q > 2$.

Per $m = 1$, la (10) diventa:

$$l(q-1) + t'_3 - 2 \leq 2t_0. \tag{10''}$$

Se $t_0 = 0$, la (10″) ammette le sole soluzioni seguenti:

$$\text{I)} \qquad l = 1 \quad , \quad q = 3 \quad , \quad t'_3 = 0 ,$$

$$\text{II)} \qquad l = 0 \quad , \quad 0 \leq t'_3 \leq 2 .$$

Nel caso I), per la (6) risulta $k = 6$. Per l'unico punto Q della 3–secante fissata a, non appartenente a K, le tre rette distinte da a, sono necessariamente 1–secanti K in tre punti distinti, i quali non possono essere allineati (altrimenti K ammetterebbe una 4–secante). Per essi passa allora una ed una sola conica $\mathcal{C}$, tangente ad a in Q. Dunque K coincide con il $\{6, 3\}$–arco $(\mathcal{C} - Q) \cup (a - Q)$, denotato precedentemente con $K'_{3,6}$.

Nel caso II), si ha intanto, per la (6), $k = 2q + 1$. Dalla seconda delle (4) segue allora (ove si faccia $k = 2q + 1$ e $t_0 = 0$): $t_2 = -q(q - 4)$. Dovendo essere $t_2 \geq 0$, si traggono i due sottocasi seguenti:

$$\text{II}_\text{a}) \qquad l = 0 \quad , \quad q = 4 \quad , \quad k = 9 \quad , \quad t_2 = 0 ,$$

$$\text{II}_\text{b}) \qquad l = 0 \quad , \quad q = 3 \quad , \quad k = 7 \quad , \quad t_2 = 3 .$$

Nel sottocaso II_a) denotiamo con A_2 ed A_3 i punti della 3–secante $a = a_1$ non appartenenti a K. Delle quattro rette per A_3, distinte da a_1, necessariamente una deve essere 3–secante di K, sia a_2, e le rimanenti tre debbono risultare 1–secanti (essendo $t_2 = 0$). Denotato con A_1 il punto di a_2 non appartenente a K, distinto da A_3, e posto $a_3 = A_1 A_2$, proviamo che a_3 è una 3–secante di K. Infatti, in caso contrario, a_3 sarebbe una 1–secante (t_2 essendo nullo) ed esisterebbe un punto P di K non appartenente a nessuna delle rette a_1, a_2, a_3; ma allora le rette $A_1 P$ e $A_2 P$ sarebbero due distinte 3–secanti di K (sempre essendo $t_2 = 0$), onde si avrebbe $k > 9$, contro al supposto. Dunque K coincide con il $\{9, 3\}$–arco $K''_{4,9}$. Nel sottocaso II_b), per l'unico punto Q della 3–secante a, non appartenente a K, escono tre rette, distinte da a, delle quali necessariamente due sono 1–secanti e la rimanente è una 2–secante di K. I quattro punti di K non appartenenti ad a sono pertanto a tre a tre non allineati (altrimenti K ammetterebbe una 4–secante). Essi costituiscono di conseguenza una conica non degenere, $\mathcal{C}$, di cui Q è un punto esterno ed a una retta esterna, talché K coincide con il $\{7, 3\}$–arco $K''_{3,7}$.

Resta soltanto più da esaminare l'ultima eventualità $m = 2$. Per essa la (10) diventa:

$$(10'') \qquad lq + t'_3 \leq 2 t_0 .$$

Se $t_0 = 0$, dovrà essere necessariamente $l = 0$ e $t'_3 = 0$. Dalla (6) si ha $k = 2q - 1$. Dalla seconda delle (4) (nella quale si faccia $k = 2q - 1$ e $t_0 = 0$) si ottiene $t_2 = -(q - 2)(q - 4)$. Quindi, essendo $t_2 \geq 0$, necessariamente o $q = 3$, $k = 5$, ma questo caso è incompatibile con la condizione $t_0 = 0$, come subito si prova; oppure $q = 4$ ed allora $k = 7$ e $t_2 = 0$. K è dunque un $\{7, 3\}$–arco tale che due suoi punti distinti qualsiansi sono congiunti da una 3–secante (essendo $t_2 = 0$) e due 3–secanti distinte qualsiansi si incontrano in un punto di K (essendo $t_0 = 0$). Pertanto K coincide con l'arco $K'_{4,7}$.

Rimane così provata la seguente

PROPOSIZIONE I. – *Sia* K *un* $\{k, 3\}$*-arco di un piano grafico irriducibile* π_q $(q > 2)$. *Denotato con* m *il massimo numero di rette* 1*-secanti di* K *uscenti da un suo punto* P, *al variare di* P *in* K. *Risulta:*

$$t_0 \geq m(m-2). \tag{11}$$

Inoltre, se $q > 4$, K *ammette almeno una retta esterna; se* $q \leq 4$, *gli unici* $\{k, 3\}$*-archi privi di rette esterne sono quelli – denotati con* $K'_{3,6}$, $K''_{3,7}$, $K'_{4,7}$, $K''_{4,9}$ – *introdotti nel secondo e terzo capoverso del presente numero.*

3. Faremo ora qualche osservazione sulle cubiche di un piano di Galois $S_{2,q}$. Cominciamo a provare la seguente

PROPOSIZIONE II. – *Se in un* $S_{2,q}$ *una cubica irriducibile* $\mathcal{C}$ *è un k-arco, dev'essere* $k \leq 3$ *se* $\mathcal{C}$ *è non singolare, e* $k \leq 4$ *se* $\mathcal{C}$ *è singolare. Per* $q \geq 8$, *ogni cubica irriducibile è un* $\{N, 3\}$*-arco. Per ogni* $q \leq 7$ *esistono di fatto cubiche irriducibili che sono k-archi.*

Dimostrazione. – Se $\mathcal{C}$ è un k-arco, cioè se $\mathcal{C}$ non ammette 3-secanti, ogni 2-secante di $\mathcal{C}$ dev'essere tangente a $\mathcal{C}$ in uno dei suoi due punti d'incontro con $\mathcal{C}$. Supponiamo $k \geq 3$, e siano P_1, P_2 due punti semplici di $\mathcal{C}$. La retta $P_1 P_2$ è allora tangente, per esempio in P_1, a $\mathcal{C}$. Se P_3 è un altro punto semplice di $\mathcal{C}$ (situato dunque fuori della retta $P_1 P_2$), la retta $P_2 P_3$, non potendo essere tangente in P_3 a $\mathcal{C}$ (altrimenti la $P_1 P_3$ sarebbe una 3-secante di $\mathcal{C}$, P_1 e P_3 essendo semplici per questa), deve risultare tangente in P_2 a $\mathcal{C}$. Poiché è unica la tangente in P_2 a $\mathcal{C}$, la cubica $\mathcal{C}$ non può possedere altri punti semplici all'infuori di P_1, P_2, P_3, Ne segue che è $k = 3$ se $\mathcal{C}$ è non singolare, mentre $k = 4$, se $\mathcal{C}$ è singolare. Poiché $\mathcal{C}$, supposta singolare, possiede $N = q, q+1, q+2$ punti a seconda che il punto doppio sia un nodo, una cuspide o un punto doppio isolato, si ha che, se $q > 4$, ogni cubica singolare è un $\{N, 3\}$-arco, con $N = q, q+1, q+2$.

Se $\mathcal{C}$ è non singolare, ossia ellittica, per il numero N dei suoi punti valgono le seguenti limitazioni dovute ad H. Hasse [4], § 4 (cfr. anche A. Weil [7], p. 70):

$$(\sqrt{q}-1)^2 \leq N \leq (\sqrt{q}+1)^2, \tag{12}$$

talché, se $q \geq 8$, risulta $N \geq 4$. Per quanto precede, ogni cubica non singolare di $S_{2,q}$, con $q \geq 8$, risulta dunque un $\{N, 3\}$-arco.

Sono di verifica pressoché immediata i fatti seguenti: per $q = 2$, ogni cubica cuspidata è un 3-arco; per $q = 3$, ogni cubica nodata è un 3-arco; in $S_{2,4}$, la cubica nodata di equazione $xyz + (x-y)^2(x+iy) = 0$ (i, immaginario di Galois) è un 4-arco; in $S_{2,5}$, la cubica ellittica di equazione $2xy^2 + x^2z - xyz + yz^2 = 0$ ed in $S_{2,7}$ la cubica ellittica di equazione $x^2y + 3y^2z + xz^2 = 0$ sono dei 3-archi. L'asserto risulta così completamente provato.

Dimostriamo ora la

PROPOSIZIONE III. – *In un piano di Galois* $S_{2,q}$, *con* $q > 4$, *ogni cubica irriducibile ammette qualche retta esterna. Risulta inoltre:*

$$t_0 \geq (q-5)\left(\frac{q-1}{4} - \sqrt{q}\right) + 4, \quad se \quad q > 13. \tag{13}$$

Dimostrazione. – La prima parte è un'immediata conseguenza delle proposizioni I e II; basterà dunque stabilire la (13). Se $\mathcal{C}$ è una cubica non singolare ed N denota il numero dei suoi punti, sussiste la relazione (12) di Hasse, la quale continua a valere anche se $\mathcal{C}$ è singolare (purché irriducibile). Denotato con v_s^{P} $(s = 1, 2, 3)$ il numero delle s-secanti per un punto P di $\mathcal{C}$, si ha evidentemente:

$$v_2^{\mathrm{P}} \leq 5, \tag{14}$$

ed inoltre $2v_3^{\mathrm{P}} + v_2^{\mathrm{P}} = \mathrm{N} - 1$, $v_1^{\mathrm{P}} + v_2^{\mathrm{P}} + v_3^{\mathrm{P}} = q + 1$, da cui:

$$v_1^{\mathrm{P}} = q + 1 - (\mathrm{N} + v_2^{\mathrm{P}} - 1)/2.$$

Tenendo presente la (12) e la (14), dall'ultima relazione si ricava:

$$m \geq v_1^{\mathrm{P}} \geq \frac{(\sqrt{q}+1)(\sqrt{q}-3)}{2}, \tag{15}$$

m essendo il massimo degli interi v_1^{P}, al variare di P su $\mathcal{C}$. Dalla (11) e dalla (15) segue allora la (13), nell'ipotesi che sia $q > 13$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. BARLOTTI, *Sui {k, n}-archi di un piano lineare finito*, « Boll. U.M.I. » (3), *11*, 553–556 (1956).

[2] A. COSSU, *Su alcune proprietà dei {k, n}-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito*, « Rend. di Mat. » (5), *20*, 271–277 (1961).

[3] B. D'ORGEVAL, *Sur certains {k, 3}-arcs en Géométrie de Galois*, « Bull. Acad. belg. Cl. Sci. », *46*, 597–603 (1960).

[4] H. HASSE, *Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper III*, « J. Reine Angew. Math. », *175*, 193–208 (1936).

[5] B. SEGRE, *Lectures on modern Geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[6] B. SEGRE, *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. » (4), *48*, 1–96 (1959).

[7] A. WEIL, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, « Act. Sci. et Ind. », 1041, Hermann, Paris 1948.