Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Benedetto Pettineo

Sul teorema dell'alternativa per talune equazioni integrali singolari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.3, p. 366–372.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_3_366_0>

Analisi matematica. — *Sul teorema dell'alternativa per talune equazioni integrali singolari* (*). Nota di BENEDETTO PETTINEO, presentata (**) dal Corrisp. C. MIRANDA.

SUMMARY. — The usual representation formula (by means of potential theory) of the solutions of boundary–value problems is not the right one in the case of a non–regular oblique derivative for elliptic equations in the Euclidean space S_m ($m \geq 3$), because the alternative theorem for the singular integral equation, which is obtained, does not hold (in $L^{(2)}$).

In un dominio (1) D limitato dello spazio euclideo S_m a $m \geq 3$ dimensioni sia assegnata un'equazione lineare di tipo ellittico

$$\text{(1)} \qquad E(u) \equiv \sum_{h,k} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = f$$

e in ogni punto $x \equiv x_1, \cdots, x_m$ della frontiera FD di D sia assegnato un asse l_x (orientato). Considero il problema della derivata obliqua

$$\begin{cases} E(u) = f & (x \in D - FD), \quad (1) \\ \mathcal{L}(u) \equiv \dfrac{\partial u}{\partial l} + \beta u = q_0 . & (x \in FD), \quad (2) \end{cases}$$

in opportune condizioni di regolarità pei coefficienti di E, per la frontiera FD e per la funzione β e l'asse obliquo l definiti in FD. Supposto (ma solo per brevità) che esista la soluzione fondamentale principale $G(x, y)$ relativa alla (1), si cerchi la soluzione del problema nella classe delle funzioni u di quadrato sommabile in D, con $E(u)$ pure di quadrato sommabile e con u e le derivate $\partial u / \partial x_h$ di quadrato sommabile in FD. Allora, com'è ben noto, si può porre

$$\text{(3)} \qquad u(x) = -\int_D G(x, y) f(y)\, dy + 2 \int_{FD} G(x, y)\, \varphi(y)\, d_y \sigma .$$

Se φ è hölderiana in FD, imponendo la condizione (2), si perviene all'equazione integrale singolare

$$\text{(4)} \qquad \alpha(x)\, \varphi(x) + 2 \int_{FD} \mathcal{L}_x G(x, y)\, \varphi(y)\, d_y \sigma = q(x) \qquad (x \in FD),$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1966.

(1) Per la terminologia ed i richiami sulle equazioni alle derivate parziali e sulle trasformazioni integrali singolari cfr. C. MIRANDA [8], [9].

dove

(5) $$q(x) = q_0(x) + \int_D \mathfrak{L}_x G(x, y) f(y)\, dy \qquad (x \in \mathrm{FD})\,;$$

nella (4), inoltre, l'integrale (singolare) è preso in valor principale ed il coefficiente $\alpha(x)$ si annulla quando – e solo quando – l'asse l_x è tangente alla frontiera FD.

Posto, brevemente, (quando φ è hölderiana)

(6) $$\mathrm{T}(\varphi) = 2 \int_{\mathrm{FD}} \mathfrak{L}_x G(x, y)\, \varphi(y)\, d_y\sigma \qquad (x \in \mathrm{FD})$$

(con l'integrale preso in valor principale), è ben noto (2) che T, come trasformazione lineare (3), è prolungabile per continuità in tutto lo spazio di Hilbert $\mathrm{L}^{(2)}$, costituito dalle funzioni di quadrato sommabile in FD, in cui il prodotto scalare (φ_1, φ_2) ha la consueta definizione

(7) $$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathrm{FD}} \varphi_1(x)\, \varphi_2(x)\, d\sigma\,.$$

Sia T^* la trasformazione aggiunta di T. Considerata l'equazione (4), prolungata in $\mathrm{L}^{(2)}$,

(8) $$\alpha\varphi + \mathrm{T}(\varphi) = q \qquad (q \in \mathrm{L}^{(2)})$$

e considerata pure l'equazione aggiunta

(9) $$\alpha\varphi + \mathrm{T}^*(\varphi) = q \qquad (q \in \mathrm{L}^{(2)}),$$

dimostrerò quanto segue:

I) *Se, almeno in un punto* x *di* FD, *è* $\alpha(x) = 0$ *e se l'autoinsieme della equazione* (8), *oppure l'autoinsieme dell'aggiunta* (9), *ha dimensione finita, non vale – per nessuna delle due equazioni – il teorema dell'alternativa* (4).

Il risultato a cui sono pervenuto mostra che la dimostrazione di un eventuale teorema di esistenza per il problema (1), (2) non può essere conseguita attraverso la traduzione in equazione integrale da me considerata. Occorre perciò porre il problema stesso in una classe funzionale più ampia, nella quale non sia più valida la formula di rappresentazione (3).

(2) Cfr. S. G. MIHLIN [7]. Per la validità della (6) in $\mathrm{L}^{(2)}$ cfr. A. P. CALDERON e A. ZYGMUND [11].

(3) Per la terminologia ed i richiami, relativamente all'analisi funzionale, cfr. G. FICHERA [2]; F. RIESZ e B. SZ.-NAGY [10].

(4) Il teorema dell'alternativa, nella consueta formulazione, con riferimento (per esempio) all'equazione (8), è questo: Condizione necessaria e sufficiente affinché la (8) abbia soluzione (in $\mathrm{L}^{(2)}$) è che il termine noto q ($\in \mathrm{L}^{(2)}$) sia ortogonale all'autoinsieme, cioè ad ogni soluzione (in $\mathrm{L}^{(2)}$) dell'equazione aggiunta omogenea $\alpha\varphi + \mathrm{T}^*(\varphi) = 0$.

1. Con riferimento all'equazione (1), si denoti con ν_x la conormale esterna a FD nel punto x. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial l} = \tau_0 \frac{\partial}{\partial \nu} + \tau \frac{\partial}{\partial t}, \tag{10}$$

dove l'asse t_x (ben definito quando $\tau \neq 0$) è tangente a FD; si ha poi

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{r=1}^{m} \omega_r \frac{\partial}{\partial x_r} \tag{11}$$

e la (10) si può scrivere così

$$\frac{\partial}{\partial l} = \tau_0 \frac{\partial}{\partial \nu} + \sum_{r=1}^{m} \omega_r \frac{\partial}{\partial x_r} . \tag{12}$$

Questa ha il vantaggio di esser valida in ogni punto x di FD, anche quando l'asse t_x non è definito. I coefficienti ω_r (come pure τ_0 e τ) si suppongono convenientemente regolari (in tutta FD).

Sia x_0 un punto di (FD) in cui si annulla la funzione $\alpha(x)$. In tale punto l'asse l è tangente a FD, sicché risulta $\tau = \pm 1$. Per conseguenza, una almeno delle funzioni ω_r – poniamo ω_1 – è non nulla, per esempio è positiva nel punto x_0; di guisa che si mantiene positiva in tutto un intorno di x_0. Trasformando allora convenientemente le variabili, è lecito supporre che il punto x_0 (in cui $\alpha = 0$) sia l'origine degli assi, che FD contenga la porzione $\mathcal{F}$ così definita

$$\mathcal{F} \equiv \{0 \leq x_1 \leq 1, \cdots, 0 \leq x_{m-1} \leq 1, x_m = 0\} \tag{13}$$

e quivi si abbia

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad (x \in \mathcal{F}) \tag{14}$$

(sicché $\omega_1 = \tau, \omega_2 = \cdots = \omega_m = 0$).

Ciò posto, si supponga – per fissare le idee – che sia di dimensione finita l'autoinsieme U^* dell'equazione (9); si ammetta quindi – per assurdo – che per questa equazione, e quindi [5] anche per la sua aggiunta (8), sia valido il teorema dell'alternativa. Allora, com'è ben noto [6], esiste una costante $K > 0$ tale che si abbia

$$\|\varphi\| \leq K \|\alpha\varphi + T^*(\varphi)\| \tag{15}$$

per ogni funzione φ (di $L^{(2)}$) ortogonale all'autoinsieme U^* della (9).

Il teorema I resterà, dunque, acquisito se si dimostra l'esistenza (in $L^{(2)}$) di un sistema $\{\varphi_n\}$ ortonormale, ortogonale all'autoinsieme U^* e tale che si

(5) Cfr., per esempio, G. FICHERA [2], p. 152.

(6) Cfr. pure una nota condizione esistenziale di FICHERA [3] e FAEDO [1].

abbia

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha\varphi_n\| = 0 , \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|T^*(\varphi_n)\| = 0 . \tag{17}$$

Sceglierò inoltre le funzioni φ_n con la condizione

$$\varphi_n(x) = 0 \qquad (x \in FD - \mathfrak{F}). \tag{18}$$

2. Se φ è hölderiana (in FD), risulta

$$T^*(\varphi) = 2 \int_{FD} \varphi(y)\, \mathfrak{L}_y\, G(y, x)\, d_y\sigma \qquad (x \in FD) \tag{19}$$

(con l'integrale preso in valor principale). Si ponga

$$R(\varphi) = 2\,\tau(x) \int_{FD} \frac{\partial G(y, x)}{\partial y_1}\, \varphi(y)\, d_y\sigma \qquad (x \in FD), \tag{20}$$

$$R_0(\varphi) = 2 \int_{FD} [\tau(y) - \tau(x)]\, \frac{\partial G(y, x)}{\partial y_1}\, \varphi(y)\, d_y\sigma + \tag{21}$$

$$+ 2 \int_{FD} \tau_0(y)\, \frac{\partial G(y, x)}{\partial \nu_y}\, \varphi(y)\, d_y\sigma + 2 \int_{FD} \beta(y)\, G(y, x)\, \varphi(y)\, d_y\sigma \qquad (x \in FD)$$

(sempre con φ hölderiana) e si prolunghino per continuità R ed R_0 in $L^{(2)}$. Se

$$\varphi(x) = 0 \qquad (x \in FD - \mathfrak{F}), \tag{22}$$

ricordando l'espressione (2) dell'operatore $\mathfrak{L}$, la (19), la (10) e la (14), risulta

$$T^*(\varphi) = R(\varphi) + R_0(\varphi) . \tag{23}$$

Intanto (in opportune condizioni di regolarità pei dati) *la trasformazione* R_0 *è completamente continua. Ma allora, se il sistema* $\{\psi_h\}$ *è ortonormale, si ha*

$$\lim_{h\to\infty} \|R_0(\psi_h)\| = 0 . \tag{24}$$

Basta far vedere che è nullo un qualsivoglia elemento d'accumulazione dell'insieme compatto $\{R_0(\psi_h)\}$; vale a dire (sostanzialmente), se

$$\lim_{h\to\infty} R_0(\psi_h) = q \tag{25}$$

(e se $\{\psi_h\}$ è ortonormale), si ha $\|q\| = 0$. A tal fine mostrerò che, comunque si assuma $w \in L^{(2)}$, si ha

$$(q , w) = 0 . \tag{26}$$

Ed invero, dalla (25) si trae

$$(27) \qquad (q\,, w) = \lim_{h\to\infty} (\mathrm{R}_0(\psi_h), w) = \lim_{h\to\infty} (\psi_h\,, \mathrm{R}_0^*(w))\,,$$

dove R_0^* è la trasformazione aggiunta di R_0. Ora è ben noto, essendo $\{\psi_h\}$ ortonormale, che, comunque si assuma $v \in \mathrm{L}^{(2)}$, si ha $\lim_{h\to\infty} (\psi_h\,, v) = 0$.

Ciò premesso, per ogni $n = 1\,, 2\,, 3\,, \cdots$, si consideri una funzione $u_n(x_1)$ della variabile x_1, continua assieme alla sua derivata prima u_n' nell'intervallo $\left(\frac{1}{n+1}\,, \frac{1}{n}\right)$, nulla assieme alla sua derivata agli estremi di questo intervallo e tale che si abbia

$$(28) \qquad \int_{1/n+1}^{1/n} |u_n(x_1)|^2\, dx_1 = 1\,.$$

Risulta

$$(29) \qquad \sqrt{\int_{1/n+1}^{1/n} |u_n'(x_1)|^2\, dx_1} > 0\,.$$

Intanto, la dimensione δ dell'autoinsieme U^* dell'equazione (9) è (per ipotesi) finita; se $\delta > 0$, si consideri un sistema completo $\{w_r\}$ $(r = 1\,, \cdots, \delta)$ di autosoluzioni dell'equazione e si ponga, per ogni n,

$$(30) \qquad p_{n,r}(x_2\,, \cdots, x_m) = \int_{1/n+1}^{1/n} u_n(x_1)\, w_r(x)\, dx_1 \qquad (r = 1\,, \cdots, \delta).$$

Poscia – fissato n – per ogni $h = 1\,, 2\,, 3\,, \cdots$, si consideri una funzione $v_{n,h}(\xi)$ del punto $\xi = x_2\,, \cdots, x_{m-1}$, continua assieme alle sue derivate parziali prime nell'insieme

$$(31) \qquad \mathfrak{F}_n^{(h)} \equiv \left\{ \frac{1}{n+h+1} \le x_2 \le \frac{1}{n+h}\,, \cdots, \frac{1}{n+h+1} \le x_{m-1} \le \frac{1}{n+h} \right\},$$

nulla assieme alle sue derivate prime sulla frontiera di $\mathfrak{F}_n^{(h)}$ e tale che si abbia

$$(32) \qquad \int_{\mathfrak{F}_n^{(h)}} |v_{n,h}(\xi)|^2\, dx_2 \cdots dx_{m-1} = 1\,,$$

$$(33) \qquad \int_{\mathfrak{F}_n^{(h)}} v_{n,h}(\xi)\, p_{n,r}(x_2\,, \cdots, x_{m-1}\,, 0)\, dx_2 \cdots dx_{m-1} = 0 \qquad (r = 1\,, \cdots, \delta).$$

(Naturalmente, se $\delta = 0$, si impone a $v_{n,h}$ la sola condizione (32) [7]. Si definisca adesso in tutta la frontiera FD la funzione $\psi_{n,h}(x)$ ponendo

$$(34) \qquad \psi_{n,h}(x) = \begin{cases} u_n(x_1)\, v_{n,h}(\xi) & \textit{per} \quad \frac{1}{n+1} \le x_1 \le \frac{1}{n}\,, \ \xi \in \mathfrak{F}_n^{(h)}\,, \ x_m = 0 \\ 0 & \textit{altrove}. \end{cases}$$

(7) Non si manchi di notare la necessità dell'ipotesi $m \ge 3$.

Si ponga quindi

$$(35)\qquad \vartheta_{n,h}(x) = \frac{1}{\mu_n}\,\frac{\partial\psi_{n,h}(x)}{\partial x_1},$$

dove, tenuta presente la (29),

$$(36)\qquad \mu_n = \sqrt{\int_{1/n+1}^{1/n} |u'_n(x_1)|^2\,dx_1}\,.$$

Si riconosce quanto segue:

A) per ogni n, i sistemi $\{\psi_{n,h}\}$ e $\{\vartheta_{n,h}\}$ sono ortonormali;

B) per ogni n e per ogni h, la funzione $\psi_{n,h}$ risulta ortogonale al sistema $\{w_r\}$ $(r = 1, \cdots, \delta)$ (quando c'è), e quindi all'autoinsieme U* dell'equazione (9);

C) se $n \neq n'$, si ha (qualunque siano h e h')

$$(37)\qquad (\psi_{n,h}\,,\,\psi_{n',h'}) = 0\,;$$

D) risulta

$$(38)\qquad \psi_{n,h}(x) = \vartheta_{n,h}(x) = 0 \qquad\qquad (x \in \mathrm{FD} - \mathfrak{F})$$

e quindi vale la (23), cioè

$$(39)\qquad \mathrm{T}^*(\psi_{n,h}) = \mathrm{R}(\psi_{n,h}) + \mathrm{R}_0(\psi_{n,h})\,;$$

E) posto

$$(40)\qquad \mathrm{R}'(\varphi) = -2\,\mu_n\,\tau(x)\int_{\mathrm{FD}} \mathrm{G}(y\,,x)\,\varphi(y)\,d_y\sigma \qquad\qquad (x \in \mathrm{FD}),$$

risulta

$$(41)\qquad \mathrm{R}(\psi_{n,h}) = \mathrm{R}'(\vartheta_{n,h})\,.$$

Fissato n, poiché il sistema $\{\psi_{n,h}\}$ è ortonormale e la trasformazione R_0 è completamente continua, ha luogo la (24), o meglio

$$(42)\qquad \lim_{h\to\infty} \|\mathrm{R}_0(\psi_{n,h})\| = 0\,;$$

per lo stesso motivo, considerato che R′ è completamente continua e che il sistema $\{\vartheta_{n,h}\}$ è ortonormale,

$$(43)\qquad \lim_{h\to\infty} \|\mathrm{R}'(\vartheta_{n,h})\| = 0\,.$$

Da questa e dalla (42), tenuto conto delle (39) e (41), si trae

$$(44)\qquad \lim_{h\to\infty} \|\mathrm{T}^*(\psi_{n,h})\| = 0\,.$$

Sia allora h_n il minimo tra gli indici h pei quali si ha

$$(45)\qquad \|\mathrm{T}^*(\psi_{n,h})\| < \frac{1}{n}\,.$$

Posto

$$\varphi_n = \psi_{n,h_n}\,, \tag{46}$$

si ha subito la (17); peraltro, dalle proprietà A, C, B segue che il sistema $\{\varphi_n\}$ è ortonormale ed ortogonale all'autoinsieme U* della (9).

La (16) si deduce infine dalla circostanza che la funzione φ_n, cioè ψ_{n,h_n}, è nulla fuori dell'insieme

$$\mathfrak{F}^0_{(n)} \equiv \left\{ \frac{1}{n+1} \le x_1 \le \frac{1}{n}\,, \frac{1}{n+h_n+1} \le x_2 \le \frac{1}{n+h_n}\,, \cdots \right. \tag{47}$$
$$\left. \cdots, \frac{1}{n+h_n+1} \le x_{m-1} \le \frac{1}{n+h_n}\,, x_m = 0 \right\}.$$

Ed invero, denotando con ε_n il massimo della funzione $|\alpha(x)|$ nell'insieme $\mathfrak{F}^0_{(n)}$, si ha

$$\|\alpha\varphi_n\| \le \varepsilon_n \|\varphi_n\| = \varepsilon_n \tag{48}$$

e la semplice continuità della funzione α (che è nulla nell'origine degli assi) assicura la validità della (16).

BIBLIOGRAFIA.

[1] S. FAEDO, *Su un principio di esistenza nell'Analisi lineare*, «Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa» (1957).
[2] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Libreria Veschi, Roma (1962).
[3] G. FICHERA, *Su un principio di dualità per talune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali*, «Rend. Accad. Lincei» (1955).
[4] G. GIRAUD, *Équations à intégrales principales. Étude suivie d'une application*, «Ann. Éc. Norm. Sup.» (1934).
[5] G. GIRAUD, *Équations à intégrales principales d'ordre quelconque*, «Ann. Éc. Norm. Sup.» (1936).
[6] J. J. LIONS, *Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique*, «Ann. of Math.» (1956).
[7] S. G. MIHLIN, *Singular integral equations*, «Uspehi Math. Nauk.» N.S. (1948).
[8] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, «Ergeb. Math.», N.F. 2, Springer-Verlag (1955).
[9] C. MIRANDA, *Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali*, «Mem. Accad. Lincei» (1965).
[10] F. RIESZ e B. SZ.-NAGY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, «Acad. des Sc. de Hongrie», Budapest (1955).
[11] A. P. CALDERON e A. ZYGMUND, *On the existence of certain singular integrals*, «Acta Math.» (1952).