Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Evangelisti

Sulla soluzione numerica delle equazioni della propagazione col metodo delle caratteristiche. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.3, p. 329–339.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_3_329_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 marzo 1966

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Fisica matematica. — *Sulla soluzione numerica delle equazioni della propagazione col metodo delle caratteristiche.* Nota I (*) del Corrisp. GIUSEPPE EVANGELISTI.

SUMMARY. — The research concerns the application of the method of characteristics to the numerical solution of one-dimensional problems of propagation. A new type of grid of characteristics is used, which inserts a Massau grid into a rectangular mesh with the sides parallel to the axes of the space-time plane.

1. Oggetto dell'indagine è un sistema quasi lineare di due equazioni a derivate parziali del primo ordine in due variabili indipendenti e due funzioni incognite, nel quale confluiscono i modelli matematici di un vasto insieme di fenomeni di propagazione in un mezzo unidimensionale. Le due variabili indipendenti sono l'ascissa x, che individua il posto, e il tempo t; sono indicate con $u(x, t)$ e $v(x, t)$ le due grandezze che si propagano. Un siffatto sistema ha la forma generale

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11} u_x + a_{12} u_t + a_{13} v_x + a_{14} v_t + b_1 = 0 \\ a_{21} u_x + a_{22} u_t + a_{23} v_x + a_{24} v_t + b_2 = 0 \end{cases}$$

(*) Presentata nella seduta del 12 marzo 1966.

dove i coefficienti $a_{11} \ldots a_{24}$ delle derivate parziali u_x, u_t; v_x, v_t e i termini b_1 e b_2 sono funzioni soltanto dei quattro argomenti x, t; u, v. La matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

sarà brevemente indicata come matrice del sistema.

Se il fenomeno rappresentato è, secondo le premesse, propagatorio, il sistema (1) appartiene al tipo iperbolico: per ogni punto della regione del piano x, t di validità del sistema passano, reali, distinte e giacenti nello stesso piano, due curve caratteristiche le cui tangenti sono individuate dalle relative direzioni caratteristiche dt/dx. Queste ultime restano determinate nel modo che segue [1]: indicato col simbolo (j, k) il determinante formato con le colonne j^{ma} e k^{ma} della matrice (2), le due direzioni caratteristiche λ e μ, che individuano le due congruenze di curve caratteristiche (contraddistinte dagli stessi simboli λ e μ) si scrivono:

direzione caratteristica λ:

$$\frac{dt}{dx} = \lambda = \frac{(1,4) + (2,3) + \sqrt{\{(1,4) + (2,3)\}^2 - 4\,(1,3)\,(2,4)}}{2\,(1,3)} \tag{3}$$

direzione caratteristica μ:

$$\frac{dt}{dx} = \mu = \frac{(1,4) + (2,3) - \sqrt{\{(1,4) + (2,3)\}^2 - 4\,(1,3)\,(2,4)}}{2\,(1,3)}\,. \tag{4}$$

Naturalmente, deve risultare sempre soddisfatta la disuguaglianza

$$\{(1,4) + (2,3)\}^2 - 4\,(1,3)\,(2,4) > 0$$

imposta dal carattere iperbolico del sistema. Sarà anche ammesso, conformemente alla generalità degli interessi fisici, che le direzioni λ siano sempre positive e le direzioni μ sempre negative.

A ciascuna equazione differenziale delle caratteristiche si associa un'equazione a differenziali totali, detta di compatibilità. Fatte, per brevità di scrittura, le posizioni

$$\begin{cases} A^{(\lambda)} = (1,2) & B^{(\lambda)} = (1,3)\,\lambda - (2,3) & C^{(\lambda)} = (1,5)\,\lambda - (2,5) \\ A^{(\mu)} = A^{(\lambda)} = (1,2) & B^{(\mu)} = (1,3)\,\mu - (2,3) & C^{(\mu)} = (1,5)\,\mu - (2,5) \end{cases} \tag{5}$$

le due equazioni di compatibilità si scrivono

equazione di compatibilità λ:

$$A^{(\lambda)}\,du + B^{(\lambda)}\,dv + C^{(\lambda)}\,dx = 0 \tag{6}$$

equazione di compatibilità μ:

$$A^{(\mu)}\,du + B^{(\mu)}\,dv + C^{(\mu)}\,dx = 0\,. \tag{7}$$

(1) Si rimanda, per i dovuti dettagli, al trattato di F. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali*, Cremonese, Roma 1957, di cui è seguito, in genere, anche il simbolismo.

La corrispondenza fra l'originario sistema a derivate parziali e il sistema delle equazioni delle caratteristiche, ciascuna associata alla rispettiva equazione di compatibilità, ha carattere essenziale: ogni soluzione di uno di essi soddisfa necessariamente anche all'altro (2). Su questa proprietà fondamentale appoggia il metodo numerico delle caratteristiche.

2. Il corrispettivo fisico delle equazioni indefinite sopra riportate è notorio. Il piano coordinato x , t costituisce il piano orario della propagazione; le curve caratteristiche, come uniche possibili linee di discontinuità delle soluzioni,

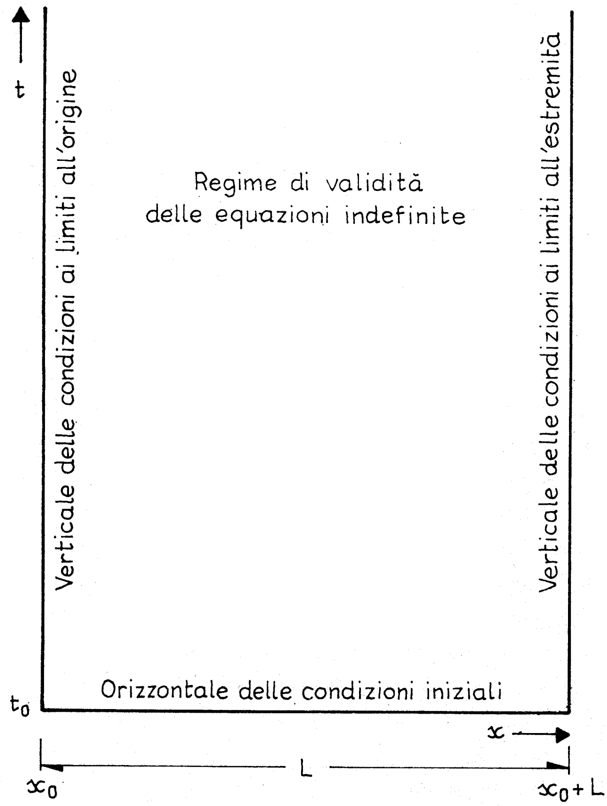

Fig. 1.

costituiscono le linee orarie lungo le quali i fronti d'onda delle incognite u , v si spostano nel mezzo; le inverse delle direzioni caratteristiche $1/\lambda$ e $1/\mu$ forniscono, rispettivamente, la celerità delle onde progressive e delle onde regressive.

Per quanto riguarda il dominio di validità delle equazioni indefinite, e le condizioni supplementari sulla relativa frontiera, i problemi di propa-

(2) Vedasi, per le rispettive dimostrazioni, R. COURANT and K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Wawes*, Interscience Publishers, New York 1948.

gazione cadono entro una regola molto generale. L'interesse è concentrato in una regione del piano x, t conformata come in fig. 1: indicato con t_0 l'istante assunto come iniziale, il segmento di orizzontale $t = t_0$, che va dall'ascissa iniziale x_0 all'ascissa terminale $x_0 + L$ del mezzo propagatorio, supposto lungo L, contiene le condizioni iniziali $u(x, t_0)$, $v(x, t_0)$, cioè lo stato del mezzo nell'istante t_0; le verticali $x = x_0$ e $x = x_0 + L$ ospitano le condizioni ai limiti, quali vengono imposte, dall'istante t_0 in avanti, alle due estremità. Il sistema da risolvere vale nella semistriscia del piano x, t delimitata dall'orizzontale frontiera e dalle due verticali frontiera così individuate.

È pure regola generale che l'esplorazione numerica delle soluzioni sia richiesta per parallele alle rette frontiera: una verticale individua il decorso temporale del fenomeno in una data ascissa; un'orizzontale descrive lo stato del mezzo in un dato istante.

3. L'operazione fondamentale del metodo delle caratteristiche è il tracciamento, nel piano x, t, di un reticolo di curve caratteristiche λ e μ (cioè definite dalle equazioni differenziali (3) e (4)). Ogni punto dove avviene il calcolo delle incognite u, v, che è brevemente chiamato « punto perno », cade in un nodo di tale reticolo. Senza entrare nel problema dell'approssimazione (che sarà affrontato a tempo debito) si ammette soddisfatto un presupposto essenziale; il reticolo è sufficientemente fitto, così che ogni tronco di caratteristica compreso fra due successivi punti perno si scosta poco da un segmento di retta (e tale sarà rappresentato nei diagrammi illustrativi).

I reticoli di caratteristiche sono conosciuti da lunga data: la loro essenza fu fornita da B. Riemann [(3)] e quindi sviluppata, con particolare ampiezza di respiro, da J. Massau [(4)]. La costruzione data da quest'ultimo autore continua ad essere d'importanza teorica fondamentale, ma ha, in generale, i nodi distribuiti irregolarmente nel piano x, t. Ciò è bastato a farla cadere in discredito nelle applicazioni numeriche ai fenomeni propagatorii. La ragione è duplice: dal punto di vista operativo, la messa in conto delle condizioni ai limiti (che a volte sono molto complesse, così da accentrare in sè le maggiori difficoltà risolutive) può riuscire oltremodo pesante; sotto l'aspetto espressivo, si può ottenere l'esplorazione per rette parallele agli assi soltanto attraverso un'interpolazione bidimensionale estremamente macchinosa.

4. Ma questi difetti non sono inevitabili. È possibile forzare un reticolo di Massau a inserirsi in una prefissata rete di rettangoli con i lati paralleli agli assi; e ciò avviene, secondo il parere dello scrivente, non solo senza inconvenienti, ma anzi con vantaggi operativi, specie nei riguardi della programmazione del calcolo automatico (che è, in ogni caso, strumento indispensabile per l'applicazione numerica del metodo delle caratteristiche).

(3) B. RIEMANN, *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, « Abh. », Goettingen 1860.

(4) J. MASSAU, *Mémoire sur l'integration graphique des equations aux derivées partielles* « Mem. Ass. Ing. », Gand 1900.

È questo l'argomento della presente ricerca. Lo scrivente ha ritenuto opportuno dividerla in due fasi. La prima, di cui si tratta ora, contempla un importante caso particolare, in cui il risultato è semplice e si ottiene elementarmente. Una seconda nota considererà il caso generale, che è molto più difficoltoso.

5. Se i coefficienti $a_{11} \cdots a_{24}$ delle equazioni (1) e (2) non dipendono dalle soluzioni u e v, le curve caratteristiche possono essere determinate, come grandezze intrinseche del mezzo propagatorio, in base alle sole equazioni differenziali (3) e (4). Se i medesimi coefficienti non dipendono nemmeno dal tempo, le equazioni differenziali (3) e (4) si riducono a quadrature. Se, infine, è verificata identicamente la relazione

$$(1,4) + (2,3) = 0 \tag{8}$$

le direzioni caratteristiche λ e μ sono ovunque uguali e di segno opposto: il mezzo è isotropo riguardo alla propagazione unidimensionale.

Una volta verificato questo complesso di condizioni (fortemente restrittivo, ma accettabile per molti importanti sistemi fisici), ha senso associare al mezzo propagatorio, lungo L, il suo tempo di transito T, cioè il tempo occorrente perché il fronte d'onda di una perturbazione generata a uno dei due estremi raggiunga l'altro:

$$\mathrm{T} = \int_{x_0}^{x_0+\mathrm{L}} \lambda(x)\, dx = \int_{x_0+\mathrm{L}}^{x_0} \mu(x)\, dx \,. \tag{9}$$

Questa relazione dimostra che l'intero problema del tracciamento delle curve caratteristiche è risolto quando si conosce una sola di esse; questa caratteristica generatrice di tutte le altre è opportunamente scelta nella caratteristica λ uscente dall'ascissa iniziale x_0 dell'asse x. Essa viene contrassegnata col simbolo $\lambda_0(x)$ ed è definita dall'equazione

$$t = \lambda_0(x) = t_0 + \int_{x_0}^{x} \lambda(\xi)\, d\xi \,; \tag{10}$$

ogni altra caratteristica λ si ottiene con una traslazione della curva $\lambda_0(x)$ parallelamente a sè stessa. A sua volta, $\lambda_0(x)$ determina la caratteristica $\mu_0(x)$, uscente dall'ascissa terminale $x_0 + \mathrm{L}$, che conviene assumere come generatrice di ogni altra caratteristica μ. Risulta infatti

$$t = \mu_0(x) = t_0 + \int_{x_0+\mathrm{L}}^{x} \mu(\xi)\, d\xi = (t_0 + \mathrm{T}) - \lambda_0(x) \,. \tag{11}$$

Le curve (10) e (11) sono tracciate nella fig. 2, e vengono denominate caratteristiche fondamentali. Il loro significato fisico è evidente: la generica ascissa x sente un disturbo agente in x_0 dopo un tempo $\lambda_0(x)$, e un disturbo agente in $x_0 + \mathrm{L}$ dopo un tempo $\mu_0(x)$.

6. Ciò premesso, si procede alla costruzione del reticolo di caratteristiche. Come indica la fig. 3, la variabile tempo viene fatta avanzare per passi Δt tutti uguali fra loro; il passo Δt, che sarà anche chiamato intervallo di scansione, è soggetto alla condizione di essere sufficientemente piccolo e di essere un sottomultiplo pari del tempo di transito T: deve quindi risultare,

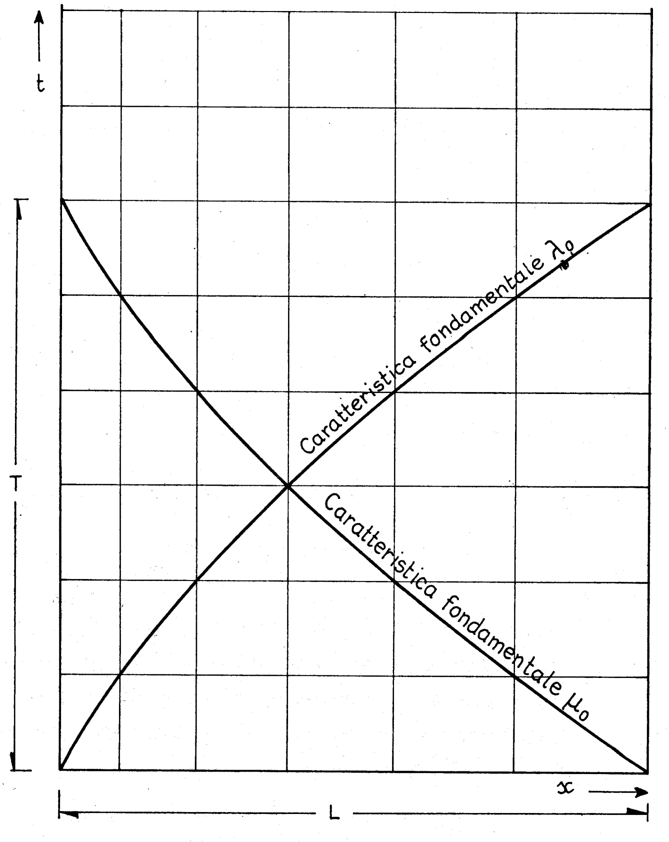

Fig. 2.

per due qualunque successivi istanti di scansione t_r , t_{r+1} della suddivisione dei tempi,

$$\Delta t = t_{r+1} - t_r = \frac{1}{n} \mathrm{T} \tag{12}$$

essendo n un numero pari sufficientemente grande [5].

(5) Come di consueto, il simbolo operatorio Δ è impiegato per la differenza avanti:

$$\Delta z_s = z_{s+1} - z_s .$$

Il calcolo delle differenze finite chiama in causa, come tutti sanno, altri due operatori: l'ope-

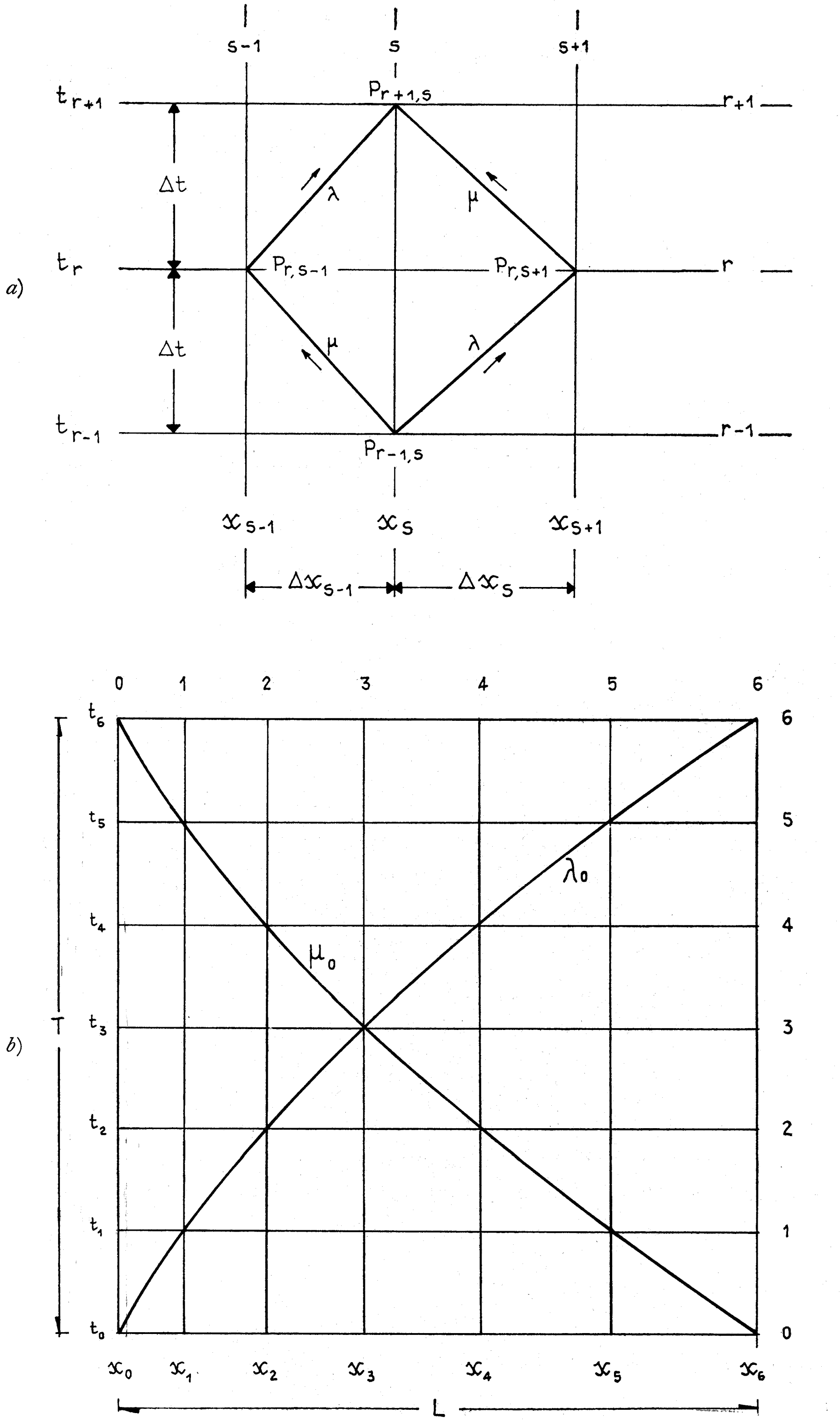
a)
s-1
s
s+1
$P_{r+1,s}$
t_{r+1}
r+1
Δt
λ
μ
t_r
$P_{r,s-1}$
$P_{r,s+1}$
r
Δt
μ
λ
t_{r-1}
$P_{r-1,s}$
r-1
x_{s-1}
x_s
x_{s+1}
Δx_{s-1}
Δx_s
b)
0 1 2 3 4 5 6
t_6 t_5 t_4 t_3 t_2 t_1 t_0
6 5 4 3 2 1 0
λ_0
μ_0
T
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6
L

Fig. 3.

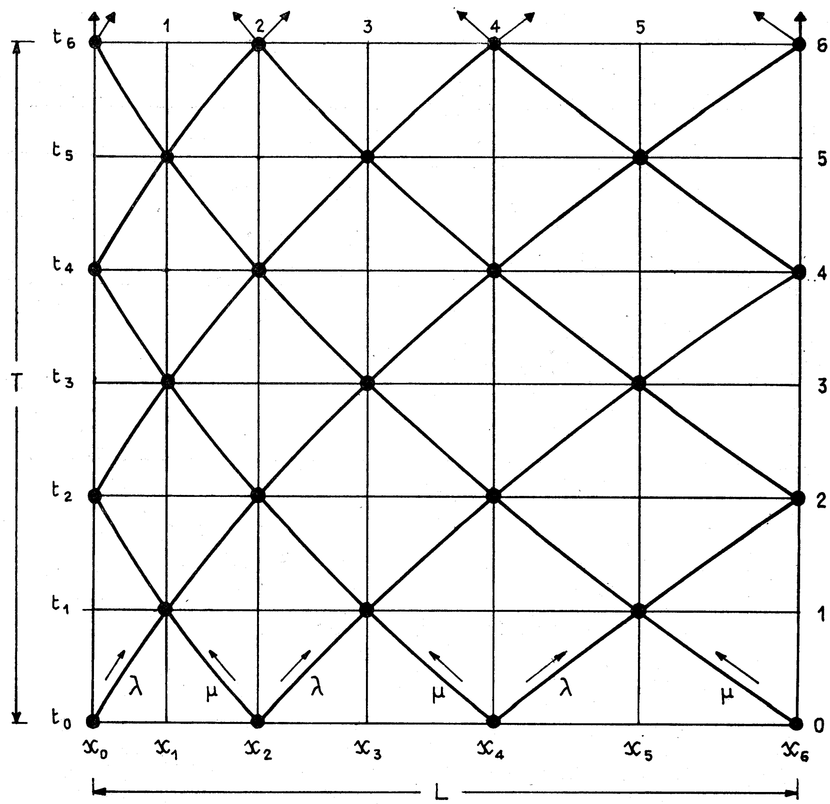

Fig. 4.

La scansione della ascissa x viene eseguita in modo che la lunghezza L del mezzo sia divisa dagli $(n - 1)$ punti interni $x_1 \cdots x_s \cdots x_{n-1}$ in n tronchi aventi tutti il tempo di transito Δt. La lunghezza Δx_s di ciascun tronco

$$\Delta x_s = x_{s+1} - x_s \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{13}$$

resta perciò definita dalla relazione

$$\int_{x_s}^{x_{s+1}} \lambda_0(x)\, dx = \Delta t = \frac{1}{n} \mathrm{T}. \tag{14}$$

La fig. 3 riporta in a) le tre orizzontali $(r - 1), r, (r + 1)$, con r dispari, che mettono in evidenza le notazioni derivanti dalle (12) e (13). Il punto

ratore di differenza indietro

$$\nabla z_s = z_s - z_{s-1},$$

che farà una breve comparsa in seguito (n. 8), e quello di differenza centrale

$$\delta z_s = z_{s+(1/2)} - z_{s-(1/2)}$$

di cui non sarà fatto uso.

d'intersezione dell'orizzontale (o riga) r^{ma}, corrispondente all'ordinata $t_0 + r\,\Delta t$, e la verticale (o colonna) s^{ma}, corrispondente all'ascissa $x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i$, è indicato col simbolo P_{rs}.

A questo modo, il piano $x\,,t$ viene ricoperto, come indica la fig. 3–b) da una rete a maglie rettangolari, con lati paralleli agli assi, di cui i punti P_{rs} costituiscono i nodi. La stessa fig. 3–b) genera un reticolo di Massau che soddisfa ai seguenti requisiti: la linea di partenza del reticolo è l'orizzontale o ($t = t_0$); i nodi del reticolo su questa orizzontale sono i punti alterni $P_{00}\,,\,P_{02}\cdots P_{0,n-2}\,,\,P_{0n}$ aventi il pedice di colonna pari. Ciò fatto, si ripete l'operazione partendo dall'orizzontale 2 ($t = t_0 + 2\,\Delta t$), poi partendo dalla orizzontale 4, e così di seguito per le successive orizzontali pari, fino a raggiungere l'istante $t_0 + m\,\Delta t$ (m pari) in cui s'intende di arrestare il calcolo.

Il risultato finale è il reticolo di caratteristiche della fig. 4 che risolve il problema. Invero, i punti perno di esso sono tutti, e soli, i nodi P_{rs} del reticolo rettangolare dalla fig. 3 in cui la somma $r + s$ dei pedici è pari.

7. Malgrado la sua elementarità, il reticolo di caratteristiche della fig. 4 non risulta che sia stato fornito prima d'ora. Anche per questo esso merita qualche commento.

Poiché fra tutti i nodi P_{rs} della fig. 3 appartengono al reticolo di caratteristiche solo quelli per cui $(r + s)$ è pari, vi è una differenza di struttura e di compiti fra le orizzontali di ordine pari e di ordine dispari: le prime contengono $n/2 + 1$ punti perno, le seconde soltanto $n/2$; le prime, e soltanto esse, hanno i punti esterni sulle verticali frontiera. La disposizione dei punti perno è a quinconce: il loro distanziamento è di $2\,\Delta t$ su ogni verticale e di un segmento che ha per tempo di transito $2\,\Delta t$ su ogni orizzontale. Riesce anche chiaro il modo con cui variano i pedici dei punti perno lungo le caratteristiche. Su ogni caratteristica λ la somma dei pedici di due punti perno successivi aumenta di due; su ogni caratteristica μ la somma dei pedici si conserva costante.

Ciò posto si riprende, un'altra volta, la rete a maglie rettangolari, della fig. 3. La rete individua i due reticoli di caratteristiche, intrecciati fra loro, della fig. 5–a): nel primo reticolo le caratteristiche sono indicate a tratto continuo e i relativi punti perno sono segnati con cerchietti pieni; nel secondo reticolo le caratteristiche sono segnate a tratti, e i punti perno con cerchietti vuoti. Il reticolo della fig. 4 si può dedurre da questo sistema di due reticoli distinti in due modi diversi. Il primo modo è ovvio: fermo restando il tempo di scansione Δt, si conserva il reticolo a tratto continuo e si sopprime quello a tratto interrotto. Il secondo modo compare in fig. 5–b): si raddoppia il tempo di scansione portandolo da Δt a $2\,\Delta t$ e si conservano entrambi i reticoli di caratteristiche; in più, vengono incluse fra i punti perno anche le intersezioni fra le caratteristiche dei due reticoli (contrassegnate da una crocetta). Questo secondo punto di vista rende conto del diverso ufficio che il reticolo di fig. 4 assegna alle orizzontali di parità diversa: le orizzontali pari costituiscono l'ossatura del calcolo; quelle dispari hanno principalmente il compito di «rompitratta» dei passi di avanzamento.

A parte il suo inquadramento nell'impostazione di Massau, il reticolo adottato presenta, secondo lo scrivente, diversi vantaggi operativi. Il calcolo lungo un'orizzontale procede secondo un cammino a zig-zag, di chiara evidenza e facile programmazione, dato che non richiama in causa punti perno

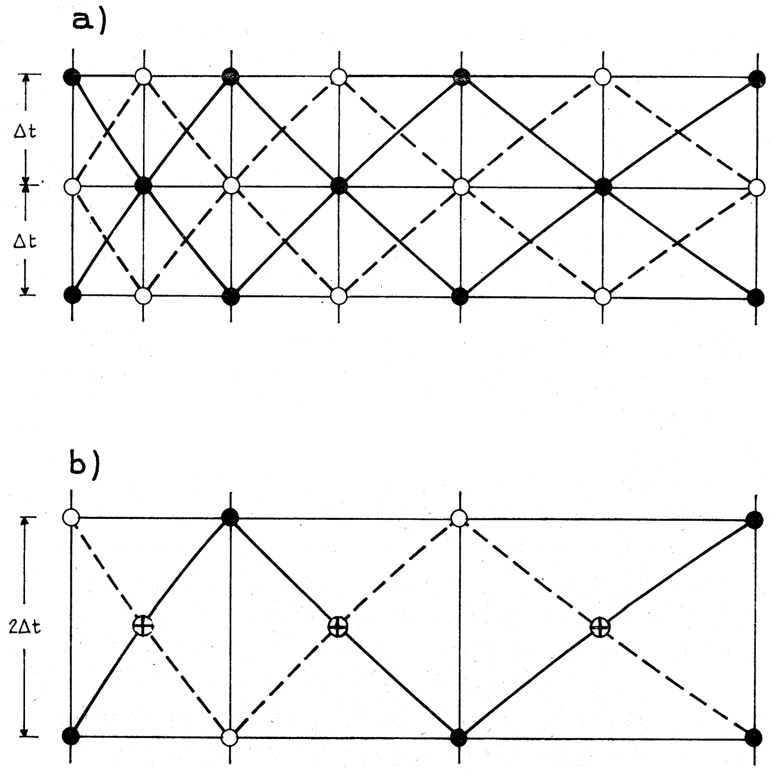

Fig. 5.

già oltrepassati. Il frazionamento del passo operato dalle orizzontali dispari avviene nel modo più semplice possibile, perché non interessa le condizioni ai limiti. La disposizione dei punti perno a quinconce assicura la minima lunghezza di tronchi di caratteristiche (e quindi la miglior precisione) a parità di densità di esplorazione nel piano x , t, o, reciprocamente, la massima densità di esplorazione a parità di numero di punti perno. Ultimo vantaggio è che il reticolo si presta bene anche al caso generale di cui si occuperà la Nota successiva.

Questo complesso di vantaggi sembra allo scrivente che superi largamente le contropartite negative, che pur esistono, e vanno menzionate. La rete rettangolare della fig. 3 non è uniforme per via della diversa lunghezza degli intervalli Δx; ma l'inconveniente ha scarso peso pratico, dato che il calcolo è quasi sempre utilizzato sopra una maglia più larga di quella richiesta dalla precisione del processo numerico. Il passo raddoppiato a 2 Δt si ritrova anche sulle verticali frontiera, bilanciando il vantaggio di un minor numero dei punti perno su di esse (che sono spesso i più difficoltosi da calcolare) con l'esigenza di una maggior precisione di calcolo; ma i punti perno sulle frontiere sono pochi di fronte a quelli interni e non porta grande aggravio adottare, per essi, dei metodi di calcolo più raffinati. Le orizzontali dispari sono meno significative di quelli pari; ma l'inconveniente ha scarso peso pratico, per la stessa ragione menzionata a proposito della non uniformità di spaziatura delle verticali.

8. Costruito il reticolo una volta per tutte, entrano in campo, per il calcolo della coppia d'incognite u , v in ciascun punto perno, le equazioni di compatibilità trasformate in equazioni a differenze finite. Di conseguenza, vanno fatte le posizioni nella (6)

$$\begin{aligned} du &\to u_{r+1,s} - u_{r,s-1} \\ dv &\to v_{r+1,s} - v_{r,s-1} \\ dx &\to \nabla x_s = x_s - x_{s-1} \end{aligned}$$

e le analoghe posizioni nella (7)

$$\begin{aligned} du &\to u_{r+1,s} - u_{r,s+1} \\ dv &\to v_{r+1,s} - v_{r,s+1} \\ dx &\to \Delta x_s = x_{s+1} - x_s . \end{aligned}$$

Costruito il sistema delle (6) e (7) così trasformate e definito l'algoritmo per risolverlo numericamente, restano calcolati, salendo di orizzontale in orizzontale, tutti i punti interni del reticolo (quelli, cioè, dove il pedice di colonna r non è né zero né n). Per la verticale frontiera il sistema cambia: viene a mancare o l'una o l'altra delle (6), (7), e il suo posto è preso da un'equazione ai limiti.

In questo stadio della ricerca non vi sono da fare altre osservazioni. L'argomento, però, sarà ripreso nella trattazione del caso generale, in cui tutti e tre i settori del processo – costruzione delle caratteristiche, calcolo delle incognite, forzamento dei reticoli di Massau entro una maglia di rettangoli – devono procedere di conserva.