Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ugo Rossetti

Lo stato di tensione nel raccordo conico fra cilindri cavi non coassiali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 247–250.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_247_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Meccanica. — *Lo stato di tensione nel raccordo conico fra cilindri cavi non coassiali.* Nota di UGO ROSSETTI, presentata (*) dal Corrisp. P. CICALA.

SUMMARY. — The membrane stresses in a conical frustum shell connecting two cylindrical shells having parallel axes are determined. A solution in finite terms is obtained for the structure subjected to uniform pressure and load systems acting in remote sections of the cylinders. The resultants of hoop stresses at the junctions, related to local bending, are also determined.

1. INTRODUZIONE. – La struttura in esame è costituita da due cilindri cavi ad assi paralleli ma non coincidenti, collegati da un tronco conico. Il problema, che nel caso della coassialità è di immediata soluzione grazie alla vastissima letteratura concernente gli involucri assialsimmetrici, nel caso del disassamento qui considerato, malgrado la sua notevole importanza tecnica, è stato oggetto solo di indagini sperimentali [1].

Per ciascun punto dei due cerchi, situati in piani normali agli assi dei cilindri, sui quali si ha la giunzione della superficie media del cono con quella del cilindro adiacente, la teoria usuale delle strutture a guscio richiede la formulazione di otto condizioni per la continuità degli sforzi e delle deformazioni, le quali si concatenano ad altrettante condizioni sussistenti sull'altro cerchio di giunzione. Il problema ha potuto essere qui semplificato con l'uso dei risultati ottenuti da Cicala col metodo di sistematica approssimazione consistente nell'adozione di sviluppi in serie di potenze del parametro δ proporzionale allo spessore [2]. Per tale via si trova che i termini fondamentali nelle anzidette equazioni di continuità che servono a definire le tensioni membranali nel cono, oltre a queste soluzioni, contengono quelle flessionali dette « soluzioni di striscia di classe 1/2 », per il fatto che esse interessano una striscia lungo la giunzione avente una larghezza che diminuisce come $\delta^{1/2}$ per δ tendente a zero). Inoltre si trova che, ammessi errori relativi $O(\delta^{1/2})$, il contributo di questi ultimi stati di tensione è equivalente a quello di un flessibile teso da uno sforzo $\overline{T}$ lungo il cerchio di giunzione e quindi può facilmente essere eliminato dalle equazioni di equilibrio. Nello stesso ordine di approssimazione, gli sforzi relativi alle soluzioni « di lungo raggio » nei due cilindri, qui supposti indefiniti, si riducono a quelli indicati dalla teoria delle travi, per la parte relativa alle tensioni tangenziali.

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

(1) G. BARTOLOZZI, *Ricerca sperimentale su un recipiente in pressione non assialsimmetrico*, « Rivista di Ingegneria Nucleare », Anno II – n. 11, settembre–ottobre 1964. La ricerca si riferisce ad una situazione di vincolo differente da quella qui considerata.

(2) P. CICALA, *Systematic approximation approach to linear shell theory*, Edit. Levrotto & Bella – Torino 1965.

Su questa base si è potuta costruire una soluzione membranale in termini finiti per la struttura soggetta a pressione uniforme, caricata su sezioni lontane come nella teoria di de St. Venant, con la limitazione che il vertice del cono cada interno ai cilindri. Il calcolo successivo delle tensioni locali presso la giunzione corrispondenti alle soluzioni di striscia può essere condotto facilmente in base alla conoscenza dello sforzo $\overline{\mathrm{T}}$.

2. LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DELLE TENSIONI MEMBRANALI. – Il vettore rappresentativo della superficie media sia

$$\boldsymbol{x}_m = x_1 \boldsymbol{i} + x\boldsymbol{k} + r\boldsymbol{r} \tag{1}$$

essendo $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}$ versori ortogonali fissi, $\boldsymbol{r}$ un versore normale a $\boldsymbol{k}$, che fa col piano $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}$ l'angolo φ variabile da o a 2π. Inoltre è $x_1 = 0$, $r = r_0$ per $x < 0$; $x_1 = \alpha x$, $r = r_0 + \beta x$ per $0 < x < l$; $x_1 = \alpha l$, $r = r_1 = r_0 + \beta l$ per $x > l$, essendo α, β, r_0, l costanti. Si suppone $\beta > \alpha > 0$.

Si assumono nella superficie media le coordinate $\xi_a = \varphi$, $\xi_b = x$ e si indicano con $f^{\cdot}, f'$ le derivate $\partial f/\partial\xi_a$, $\partial f/\partial\xi_b$. Si hanno quindi nel tronco conico i vettori di riferimento locale

$$\boldsymbol{h}_a = \boldsymbol{x}_m^{\cdot} = r\boldsymbol{t}_a \quad , \quad \boldsymbol{h}_b = \boldsymbol{x}_m' = \boldsymbol{k} + a\boldsymbol{r} + b\boldsymbol{t}_a \tag{2}$$

essendo

$$a = \beta + \alpha\cos\varphi \quad , \quad b = a^{\cdot} = -\alpha\sin\varphi \quad , \quad \boldsymbol{t}_a = \boldsymbol{r}^{\cdot} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r} \tag{3}$$

e perciò $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{r}\cos\varphi - \boldsymbol{t}_a\sin\varphi$.

L'equazione generale d'equilibrio per le tensioni membranali si scrive (3)

$$(\mathrm{S}_a\boldsymbol{h}_a + \mathrm{S}_{ab}\boldsymbol{h}_b)^{\cdot} + (\mathrm{S}_b\boldsymbol{h}_b + \mathrm{S}_{ab}\boldsymbol{h}_a)' + \mathbf{F} = 0 \tag{4}$$

essendo $\mathbf{F}\,d\xi_a\,d\xi_b$ la forza esterna sull'elemento di parete corrispondente agli incrementi $d\xi_a$, $d\xi_b$; $(\mathrm{S}_a\boldsymbol{h}_a + \mathrm{S}_{ab}\boldsymbol{h}_b)\,d\xi_b$, $(\mathrm{S}_b\boldsymbol{h}_b + \mathrm{S}_{ab}\boldsymbol{h}_a)\,d\xi_a$ sono rispettivamente le risultanti delle tensioni sulle facce $\xi_a =$ cost e $\xi_b =$ cost. In particolare, per la parete soggetta a pressione p è $\mathbf{F} = p\boldsymbol{h}_a\times\boldsymbol{h}_b$.

Scomponendo $\mathbf{F}$ nelle componenti $\mathrm{F}_a\boldsymbol{t}_a + \mathrm{F}_b\boldsymbol{h}_b + \mathrm{F}_r\boldsymbol{r}$ e separando i termini della (4) nei vettori $\boldsymbol{t}_a$, $\boldsymbol{h}_b$, $\boldsymbol{r}$ si hanno le equazioni

$$r(\mathrm{S}_a^{\cdot} + \mathrm{S}_{ab}') + 2\beta\mathrm{S}_{ab} + \mathrm{F}_a = 0 \quad , \quad \mathrm{S}_b' + \mathrm{S}_{ab}^{\cdot} + \mathrm{F}_b = 0 \quad , \quad r\mathrm{S}_a = \mathrm{F}_r . \tag{5}$$

Indichiamo X, Y le funzioni S_{ab}, S_b per $x = 0$. Per $p =$ cost. le (5) si integrano facilmente e dànno

$$\mathrm{S}_b = p(1 + a^2) \quad , \quad r^2\,\mathrm{S}_{ab} = r_0^2\,\mathrm{X} - \frac{abp}{\beta}(r^3 - r_0^3) \tag{6), (7}$$

$$\mathrm{S}_b = \mathrm{Y} + \frac{ap}{2\beta}(r^2 - r_0^2) - \frac{r_0}{\beta r}(r - r_0)\,\mathrm{X}^{\cdot} + \frac{(ab)^{\cdot}p}{2\beta^2 r}(r - r_0)(r^2 + rr_0 - 2r_0^2). \tag{8}$$

(3) Eq. (6.1) della monografia citata di Cicala.

La condizione che stabilisce la continuità degli sforzi nella giunzione del tronco conico con uno dei tratti cilindrici può essere posta nella forma

$$\boldsymbol{h}_b \, \mathrm{S}_b + \boldsymbol{h}_a \, \mathrm{S}_{ab} = -\frac{d}{d\varphi} \overline{\mathrm{T}} \boldsymbol{t}_a + r \mathrm{N}_x \, \boldsymbol{k} + r \mathrm{N}_{x\varphi} \, \boldsymbol{t}_a \,. \tag{9}$$

A primo membro appare lo sforzo membranale del tratto conico. Il primo termine al secondo rappresenta l'effetto delle soluzioni di striscia originate dalla discontinuità che ha sede nella giunzione (4): esso rappresenta, con errore relativo $\mathrm{O}(\delta^{1/2})$, la differenza degli sforzi relativi a questi stati di tensione sull'orlo del cilindro e del cono, $\overline{\mathrm{T}}$ essendo la risultante delle tensioni circonferenziali. Gli altri due addendi, contenenti gli sforzi unitari N_x , $\mathrm{N}_{x\varphi}$ nelle direzioni assiale e tangenziale, rappresentano le tensioni nel cilindro corrispondenti alle soluzioni di lungo raggio (5), o alla soluzione membranale se il cilindro non è molto lungo. In ambo i casi la forza nella direzione $\boldsymbol{r}$ è trascurabile; per quella nella direzione $\boldsymbol{t}_a$ si può scrivere $r\mathrm{N}_{x\varphi} = \mathrm{T} \sin \varphi$ con errore $\mathrm{O}(\delta^{1/2})$ rispetto a N_x se la lunghezza del tratto cilindrico è $\mathrm{O}(\delta^{-1/2})$, indicandosi con $\pi\mathrm{T}$ la forza tagliante, costante su tutte le sezioni normali a x.

3. SOLUZIONE. – Scrivendo la (9) per la sezione $x = 0$, per proiezione su $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{t}_a$ si ha

$$\mathrm{Y} = r_0 \, \mathrm{N}_x \quad , \quad a\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{T}} \quad , \quad b\mathrm{Y} + r_0 \, \mathrm{X} + \overline{\mathrm{T}}^{\cdot} = \mathrm{T} \sin \varphi \,. \tag{10}$$

Eliminando $\overline{\mathrm{T}}$ fra le ultime due equazioni si ha

$$a\mathrm{Y}^{\cdot} + 2\, b\mathrm{Y} + r_0 \, \mathrm{X} = \mathrm{T} \sin \varphi \,. \tag{11}$$

Un'analoga relazione va scritta per la sezione $x = l$. Da questa, tenendo conto della (11), con facile calcolo si ottiene l'equazione

$$\mathrm{DX} = \frac{\alpha^2 p}{2\,\beta r_0} (r_1^2 + r_1 r_0 - 2\, r_0^2) (3\, \beta \sin 2\, \varphi + 2\, \alpha \sin 3\, \varphi) \tag{12}$$

dove è indicato con D l'operatore definito da

$$\mathrm{D} f = \alpha \, (f^{\cdot\cdot} \cos \varphi - 2\, f^{\cdot} \sin \varphi) + \beta \, (f^{\cdot\cdot} + f) \,. \tag{13}$$

Con questo risulta (6)

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathrm{D} \frac{\sin \varphi}{a} = 0 \quad , \quad \mathrm{D} \sin \varphi = -\frac{3}{2} \alpha \sin 2\, \varphi \\ & \mathrm{D} \sin 2\, \varphi = -3\, \beta \sin 2\, \varphi - 4\, \alpha \sin 3\, \varphi \,. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

(4) Eq. (7.25) della monografia citata.

(5) § 11.1 della monografia citata.

(6) L'altra soluzione, cos φ/a dell'omogenea $\mathrm{DX} = 0$ non interviene nelle situazioni simmetriche.

Quindi la soluzione è data da

$$
(15) \qquad \begin{cases} X = \left(\dfrac{X_0}{a} + X_1 + a X_2 \right) \sin \varphi \\ Y = \dfrac{1}{a^2} (Y_0 + r_0 X_0 \cos \varphi) + \dfrac{r_0 X_1 - T}{2\alpha} + \dfrac{r_0 X_2}{3\alpha} a \end{cases}
$$

Le costanti X_1, X_2 sono calcolate dalla (12) facendo uso delle (14). Le costanti X_0, Y_0 sono individuate in base alla prima delle (10) in funzione dello sforzo assiale e del momento risultante sulla sezione.