Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franca Graiff

Sull'energia negli Universi chiusi. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 243–246.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_243_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Relatività. — *Sull'energia negli Universi chiusi* (*). Nota II di FRANCA GRAIFF presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — In this second part of my paper, for closed Universes of General Relativity, a « two-event » energy-momentum tensor density and a « two-event » superpotential are defined. In this way it is possible to define the total « four momentum » as a vector and to put the conservation laws (the local and global ones), in covariant form.

Both the « two-event » energy momentum tensor density and the superpotential coincide with Einstein's energy momentum complex and with Freud's superpotential in a particular class of coordinate systems.

7. IL VETTORE « ENERGIA-QUANTITÀ DI MOTO ». – Consideriamo ora la definizione (3) data nella Nota I (della quale questa costituisce il seguito diretto) dell'« oggetto » $\overline{P}_i$, che rappresenta l'energia-quantità di moto totale per Universi chiusi, nel riferimento $\bar{x}$ che risulta pseudo-cartesiano all'infinito spaziale. Se si eseguono le operazioni analoghe a quelle che intervengono nella (3) sugli oggetti $\mathfrak{U}_i^{*kl}$, Θ_i^{*k}, che rappresentano il superpotenziale di Freud e lo pseudo-tensore canonico di Einstein nell'ambito di un riferimento x^*, non si ottiene un sistema semplice $\overset{*}{P}_i$, legato al $\overline{P}_i$ dalle consuete leggi di trasformazione delle componenti di un vettore, a meno che la trasformazione $\bar{x}(x^*)$ non sia lineare.

La conclusione che ordinariamente se ne trae, anche nelle più recenti teorie, è anche la (3) non definisca un vettore [1].

Ma la (3) definisce $\overline{P}_i$ nell'ambito di un riferimento particolare, mediante operazioni (integrali) non tensoriali, su oggetti (pseudo-tensori) non aventi carattere tensoriale.

Come non sarebbe lecito concludere che lo spostamento finito nello spazio ordinario (il vettore per antonomasia) non è un vettore perché la differenza delle coordinate tra due punti a distanza finita si trasforma con legge vettoriale solo nell'ambito delle coordinate cartesiane ortogonali, così non mi sembra lecito concludere che la (3) non definisca un vettore.

Nelle ipotesi fatte, per Universi chiusi, si trova che le $\overline{P}_i$ hanno valori fisicamente significativi. Mi sembra allora ragionevole « postulare » che le (3) definiscano, nel riferimento $\bar{x}$, il vettore « Energia-quantità di moto » totali; questo stesso vettore, in un generico riferimento, anche « accelerato » rispetto

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

(1) C. Möller ha definito un vettore « Energia-quantità di moto » mediante un superpotenziale, di natura tensoriale, costruito con i versori di quattro congruenze ortogonali; per una certa scelta di congruenze, ed in un particolare riferimento, le componenti di questo vettore coincidono con le $\overline{P}_i$. (*Energy and momentum carried by gravitational wawes*, in *Atti del Convegno sulla Relatività generale*, Firenze 1964).

al primo (2), avrà componenti:

$$P_j(x_Q) = \bar{P}_i \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{x_Q} \tag{8}$$

dove le x_Q sono le coordinate di un generico punto Q delle superfici chiuse sulle quali l'integrale viene calcolato.

Rimane ora da definire, in forma covariante, il vettore P_j: questa definizione deve coincidere con la (3) nel riferimento $\bar{x}$.

8. SUPERPOTENZIALI E TENSORI ENERGETICI « DUE EVENTI ». – Dal postulato precedente risulta, di necessità, quale deve essere il comportamento degli integrandi della (3) per una trasformazione di coordinate:

a) $\bar{\Theta}_i^{\ k}\, d\bar{V}_k$, $\bar{\mathfrak{U}}_i^{\ kl}\, d\bar{S}_{kl}$ devono risultare invarianti rispetto ad una trasformazione di coordinate eseguita nei punti P del campo di integrazione S_P; poiché $\overline{dV}_k$, $\overline{dS}_{kl}$ si comportano come delle capacità di fronte ad un tale cambiamento di coordinate, $\bar{\Theta}_i^{\ k}$, $\bar{\mathfrak{U}}_i^{\ kl}$ devono comportarsi come densità tensoriali rispetto agli indici k e l;

b) per la stessa trasformazione di coordinate l'indice i deve comportarsi come ordinale; nello stesso tempo deve risultare di covarianza nei punti Q di una regione S_Q, non riguardante il campo di integrazione.

Queste due esigenze vengono soddisfatte valendosi di un procedimento analogo a quello che si segue per trasformare la differenza di coordinate di due punti nel corrispondente vettore spostamento. Basta, nel caso che ci interessa, interpretare $\bar{\Theta}_i^{\ k}$, $\bar{\mathfrak{U}}_i^{\ kl}$ come la forma particolare, assunta nel riferimento $\bar{x}$, da due densità tensoriali « due eventi »: precisamente, rispettando il simbolismo adottato nel § 5:

La densità di « energia–quantità di moto » deve essere rappresentata da una densità tensoriale « due eventi » $\mathfrak{T}_i^{\ K}(x_P\, x_Q)$ avente legge di trasformazione (6). Dovendo, nel riferimento $\bar{x}$, coincidere con lo pseudo–tensore canonico di Einstein $\bar{\Theta}_i^{\ k}$, in un riferimento generico essa avrà la forma:

$$\mathfrak{T}_i^{\ K}(x_P\, x_Q) = \bar{J}(\bar{x}_P)\, \bar{\Theta}_q^{\ R}(\bar{x}_P) \left(\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i}\right)_{x_Q} \left(\frac{\partial x^K}{\partial \bar{x}^R}\right)_{x_P}. \tag{9}$$

dove x_P e x_Q sono le coordinate di due eventi P e Q appartenenti a due regioni S_P e S_Q dell'Universo.

Similmente il superpotenziale sarà rappresentato da una densità tensoriale « due eventi » $\mathfrak{S}_i^{KL}(x_P\, x_Q)$ coincidente, nel riferimento $\bar{x}$, col superpotenziale di Freud $\bar{\mathfrak{U}}_i^{\ kl}$; in un generico riferimento sarà quindi:

$$\mathfrak{S}_i^{KL}(x_P\, x_Q) = \bar{J}(\bar{x}_P)\, \bar{\mathfrak{U}}_q^{\ RS}(\bar{x}_P) \left(\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i}\right)_{x_Q} \left(\frac{\partial x^K}{\partial \bar{x}^R}\, \frac{\partial x^L}{\partial \bar{x}^S}\right)_{x_P}. \tag{10}$$

(2) Determinare le trasformazioni che, nella Relatività generale, fanno passare da un riferimento ad un altro « accelerato » rispetto al primo è un problema ancora aperto: queste trasformazioni senz'altro non possono essere lineari.

Il riferimento $\bar{x}$ risulta allora definito (a meno di una trasformazione lineare, ed in particolare di Lorentz), come quel particolare riferimento nel quale questi tensori « due eventi » non si distinguono dai soliti tensori.

Il legame tra questi tensori « due eventi » con il superpotenziale $\underset{(j)}{\mathfrak{V}}^{KL}$ ed il corrispondente sistema conservativo $\underset{(j)}{\mathfrak{T}}^{K}$ già da me definiti in una Nota precedente (3), è molto semplice:

$$\mathfrak{T}_i^{\ K} = \underset{(j)}{\mathfrak{T}}^{K}(x_P)\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)_{x_Q}$$

$$\mathfrak{S}_i^{KL} = \underset{(j)}{\mathfrak{V}}^{KL}(x_P)\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)_{x_Q}.$$

Sussistono ancora le identità:

$$\mathfrak{T}_{i\ ,K}^{\ K} \equiv 0 \tag{11}$$

$$\mathfrak{T}_i^{\ K} \equiv -\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_{i\ \ ,L}^{KL}. \tag{12}$$

Con queste definizioni:

a) il diverso comportamento degli indici in basso ed in alto è una logica conseguenza della definizione stessa;

b) la (11) risulta un'equazione tensoriale, malgrado la divergenza ordinaria;

(*c*) la (12) definisce, mediante la divergenza ordinaria del superpotenziale, una densità tensoriale: risulta cioè anch'essa un'equazione tensoriale;

d) se dV_K, dS_{KL} sono rispettivamente elementi di ipersuperficie e di superficie bidimensionale (capacità) della regione S_P, $\mathfrak{T}_i^{\ K}\,dV_K$, $\mathfrak{S}_i^{KL}\,dS_{KL}$ si comportano come invarianti per una trasformazione in S_P, come vettori per una trasformazione in S_Q: di conseguenza $\mathfrak{T}_0^K\,dV_K$, $\mathfrak{S}_0^{KL}\,dS_{KL}$ si comportano come invarianti sia per una trasformazione in S_P che per una trasformazione in S_Q puramente « spaziale »: $\mathfrak{T}_0^K\,dV_K$ può quindi essere interpretato come « densità di energia ».

Il contenuto energetico di una regione finita dello spazio σ, di equazione $\bar{x}_0 = \text{cost.}$ risulterà:

$$P_0 = \int_\sigma \mathfrak{T}_0^K\,dV_K \tag{13}$$

e, per quanto si è detto, esso si comporterà come un invariante per trasformazioni puramente spaziali su σ.

9. FORMULAZIONE INVARIANTIVA DEL VETTORE « ENERGIA-QUANTITÀ DI MOTO » E DELLE LEGGI DI CONSERVAZIONE. – Se σ è la solita ipersuperficie $\bar{x}_0 = \text{cost.}$, ed S il suo contorno, per la (8) risulta allora:

$$P_j(x_Q) = \lim \int_\sigma \overline{\Theta}_i^{\ k}\,d\overline{V}_k\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{x_Q} = \lim \oint_S \overline{\mathfrak{U}}_i^{\ kl}\,d\overline{V}_{kl}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{x_Q}$$

(3) F. GRAIFF, Nota I cit.

e, per le definizioni precedenti, è possibile dare la definizione covariante del vettore « energia–quantità di moto » totale:

$$\mathrm{P}_j(x_\mathrm{Q}) = \lim \int_\sigma \mathcal{T}_j^{\mathrm{K}}\, d\mathrm{V}_\mathrm{K} = \lim \oint_\mathrm{S} \mathcal{S}_j^{\mathrm{KL}}\, d\mathrm{S}_{\mathrm{KL}} \tag{8'}$$

dove Q risulta un generico punto di riduzione su $\mathrm{S_Q}$.

Ricordo che, all'infinito spaziale, e quindi su tutte le S, l'Universo è di natura euclidea e le $\bar{x}$ ne risultano le coordinate cartesiane ortogonali: in questa regione di Universo, dove le $\bar{\mathrm{P}}_i$ risultano definite, ha allora senso il trasporto parallelo a distanza finita e l'integrale delle componenti cartesiane di un vettore dà le componenti di un vettore; postulando allora che le (3) definiscano le componenti del vettore P_j nel riferimento $\bar{x}$, le equazioni di conservazione (4) esprimono appunto che il vettore stesso rappresenta un campo costante.

Le componenti $\mathrm{P}_j(x_\mathrm{Q})$, date dalla (8′), dello stesso vettore nel generico riferimento x, non saranno certo delle costanti, ma dipenderanno dalle coordinate del punto di riduzione Q; sempre all'infinito spaziale, esse soddisferanno allora all'equazione tensoriale:

$$\mathrm{P}_{j/k} = 0 \tag{4'}$$

che è la forma covariante delle leggi di conservazione (4).

La (4′) traduce la struttura dell'Universo chiuso all'infinito spaziale, e poiché questa è a sua volta determinata dalle equazioni di campo, la (4′) risulta un semplice esempio di legge di conservazione (cui debbono soddisfare le equazioni di moto, conseguenze anch'esse delle equazioni di campo), espressa in forma invariantiva.

La (4′) risulta, nello stesso tempo, la condizione affinché un Universo non irraggi energia: e poiché è espressa in forma tensoriale, non dipende dal riferimento, ma dalla natura intrinseca dell'Universo stesso. Almeno nel caso considerato, non è quindi possibile, mediante un cambiamento di coordinate spazio–temporali, far comparire una radiazione! Questo fa pensare che, per Universi non chiusi [(4)], la radiazione possa essere definita in forma invariantiva, in modo tale da non poter essere annullata mediante una opportuna scelta del riferimento: in contrasto con le conclusioni espresse da Infeld nel suo libro: « Motion and Relativity » [(5)].

(4) Se pure tali Universi, soluzioni delle equazioni di campo, hanno significato fisico.

(5) L. INFELD and PLEBANSKI, *Motion and Relativity*, Warszawa 1960.