Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aristide Sanini

Sopra un tipo di varietà luogo di piani

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 238–242.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_238_0>

Geometria. — *Sopra un tipo di varietà luogo di piani* (*). Nota di ARISTIDE SANINI, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

RÉSUMÉ. — On caractérise les variétés V_3 de S_r lieu de ∞^1 plans, telles que h plans « infiniment voisins » de V_3 soient linéairement indépendants, tandis que $h+1$ plans « infiniment voisins » appartiennent à un S_{3h}.

1. Sia V_3 una varietà di uno spazio proiettivo S_r costituita da ∞^1 piani $\pi(t)$, essendo t un parametro variabile in un dato intervallo.

Fissato un generico piano $\pi(t_0)$ e considerati i piani $\pi(t_1), \cdots, \pi(t_{h-1})$, ove $t_1, \cdots, t_{h-1}$ sono valori distinti di t in un conveniente intorno di t_0, supponiamo che lo spazio congiungente i detti h piani, al tendere di t_p a t_0 ($p=1, \cdots \cdots, h-1$), abbia una determinata posizione limite S_{3h-1}: se h è il massimo numero di piani per cui ciò avviene, diremo brevemente che, per la V_3, h piani infinitamente vicini (i.v.) sono linearmente indipendenti od anche che la V_3 ha indice di sviluppabilità h.

Nella detta ipotesi, la dimensione dello spazio congiungente $h+1$ piani i.v. della V_3 è data da $3h-1+\varepsilon$, con $\varepsilon = 0, 1, 2$ ed in relazione a ciò la V_3 sarà indicata con $V_3^{(2;h;\varepsilon)}$.

In una precedente Nota [2] (1) ho studiato le V_3 con $h=2$, $\varepsilon=1, 2$; nel presente lavoro, generalizzando alcuni risultati relativi al caso $\varepsilon=1$, determino i caratteri proiettivo-differenziali delle $V_3^{(2;h;1)}$ che permettono la costruzione delle varietà stesse.

La ricerca si svolge nell'indirizzo secondo cui E. Bompiani [1] ha classificato le rigate G di S_r per le quali egli, introdotti i due *indici di sviluppabilità* ν, ν_1 ($\nu_1 < \nu$), il primo dei quali individua il massimo numero di generatrici i.v. di G linearmente indipendenti, ha dimostrato che:

« Una rigata G di S_r di indici di sviluppabilità ν, ν_1 è tale che le sue generatrici sono negli S_ν osculatori ad una curva (o ad un cono) e ne incidono gli S_{ν_1} osculatori ».

Detta $\underset{1}{A}\,\underset{2}{A}$ la generatrice generica di G, Bompiani ha dimostrato inoltre che G ammette almeno una quasi-asintotica $\gamma_{\nu_1+1,\nu}$ (2); supposto che essa sia descritta dal punto $\underset{1}{A}(t)$, indicati con $\underset{j}{A}^{(q)}$ ($j=1, 2$) i punti derivati d'ordine q, si ha:

« *Lo studio delle proprietà proiettive di una rigata* G *di* S_r *equivale allo studio delle invariantive del sistema di equazioni differenziali*:

$$(1.1)\qquad a_{1,0}\underset{1}{A} + a_{1,1}\underset{1}{A}' + \cdots + a_{1,\nu}\underset{1}{A}^{(\nu)} + b_{1,0}\underset{2}{A} + b_{1,1}\underset{2}{A}' + \cdots + b_{1,\nu_1}\underset{2}{A}^{(\nu_1)} = 0,$$

$$(1.2)\qquad a_{2,0}\underset{1}{A} + a_{2,1}\underset{1}{A}' + \cdots + a_{2,\nu-1}\underset{1}{A}^{(\nu-1)} + b_{2,0}\underset{2}{A} + b_{2,1}\underset{2}{A}' + \cdots + b_{2,r-\nu+1}\underset{2}{A}^{(r-\nu+1)} = 0.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematici del C.N.R.
(**) Nella seduta del 12 febbraio 1966.
(1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla Bibliografia che trovasi al termine.
(2) Cfr. nota (5).

Nel n. 2 si determinano le condizioni differenziali che caratterizzano le $V_3^{(2;h;1)}$. Nel n. 3 viene messa in evidenza la seguente generazione di tali varietà:

Considerata una curva Γ *in* S_r, *il piano generico* $\pi(t)$ *della* $V_3^{(2;h;1)}$ *è immerso nello* S_{2h} *osculatore a* Γ *in un suo punto, in modo che, se* α *è la dimensione minima dello spazio osculatore a* Γ *incidente* $\pi(t)$ *in una retta* g, *si abbia:* $\alpha \geq h$.

La retta g *descrive una rigata* G *associata alla* $V_3^{(2;h;1)}$ *di indici di sviluppabilità* ν, ν_1 ($\nu_1 \geq 0$), *con* $h \leq \nu \leq \alpha$, $\nu_1 = \nu + \beta - \alpha$, *ove* β *è la dimensione minima dello spazio osculatore a* Γ *incidente* $\pi(t)$ *in un punto* P, *il quale è il generico punto della quasi-asintotica* $\gamma_{\nu_1+1,\nu}$ *di* G.

Al n. 4 infine si esaminano casi particolari in cui avviene che il generico piano della $V_3^{(2;h;1)}$ è immerso nello S_{2h} osculatore ad un cono, il cui vertice incide il piano $\pi(t)$; in tali casi, la rigata G associata alla V_3 o appartiene ad uno S_{2h-1}, ovvero per essa è $\nu_1 = -1$.

2. Siano $\underset{1}{A}(t), \underset{2}{A}(t), \underset{3}{A}(t)$ tre punti che individuano il piano generico $\pi(t)$ della $V_3^{(2;h;1)}$ (3); h piani i.v. di tale varietà sono linearmente indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti i punti $\underset{1}{A}, \underset{2}{A}, \underset{3}{A}, \underset{1}{A'}, \underset{2}{A'}, \underset{3}{A'}, \cdots$ $\cdots, \underset{1}{A^{(h-1)}}, \underset{2}{A^{(h-1)}}, \underset{3}{A^{(h-1)}}$. In tal caso la matrice di elementi le coordinate omogenee dei detti punti ha rango $3h$ ed esprimeremo ciò ponendo:

$$\left\| \underset{1}{A}\,\underset{2}{A}\,\underset{3}{A}\,\underset{1}{A'}\,\underset{2}{A'}\,\underset{3}{A'} \cdots \underset{1}{A^{(h-1)}}\,\underset{2}{A^{(h-1)}}\,\underset{3}{A^{(h-1)}} \right\| \neq 0. \tag{2.1}$$

Indicato con $\pi^{(q)}(t)$ il piano individuato dai punti $\underset{i}{A^{(q)}}$ ($i = 1, 2, 3$; $q = 0, \cdots, h-1$), lo spazio congiungente h piani i.v. della $V_3^{(2;h;1)}$ coincide con lo $S_{3h-1} \equiv [\pi, \pi', \cdots, \pi^{(h-1)}]$ e s'identifica pertanto con lo spazio $(h-1)$-osculatore alla V_3 lungo il piano $\pi(t)$ (4).

Nell'ipotesi che $h+1$ piani i.v. della V_3 appartengano ad uno S_{3h}, lo $S_{3h-1} \equiv [\pi, \pi', \cdots, \pi^{(h-1)}]$ interseca il piano $\pi(t+\Delta t)$ (per $\Delta t \to 0$) secondo una retta $g(t)$ che, al variare di $\pi(t)$, descrive una rigata G intrinsecamente associata alla $V_3^{(2;h;1)}$). Per le definizioni stesse di h e del 1° indice di sviluppabilità ν di G, segue $\nu \geq h$.

Scelti i punti $\underset{1}{A}, \underset{2}{A}$ sulla generatrice $g(t)$ di G, si ha:

$$\left\| \underset{1}{A}\,\underset{2}{A}\,\underset{3}{A}\,\underset{1}{A'}\,\underset{2}{A'}\,\underset{3}{A'} \cdots \underset{1}{A^{(h-1)}}\,\underset{2}{A^{(h-1)}}\,\underset{3}{A^{(h-1)}}\,\underset{1}{A^{(h)}} \right\| = 0, \tag{2.2}$$

$$\left\| \underset{1}{A}\,\underset{2}{A}\,\underset{3}{A}\,\underset{1}{A'}\,\underset{2}{A'}\,\underset{3}{A'} \cdots \underset{1}{A^{(h-1)}}\,\underset{2}{A^{(h-1)}}\,\underset{3}{A^{(h-1)}}\,\underset{2}{A^{(h)}} \right\| = 0, \tag{2.3}$$

(3) Indicheremo con le stesse lettere anche le coordinate omogenee dei tre punti, che supponiamo di classe conveniente nel parametro t.

(4) La nozione di spazio osculatore lungo una generatrice g di una rigata G, introdotta da BOMPIANI in [1], si generalizza al caso di varietà V_{k+1} luogo di ∞^1 S_k. Se lo S_k è individuato dai punti $\underset{j}{A}(t)$ ($j = 1, \cdots, k+1$), lo spazio p-osculatore alla V_{k+1} lungo S_k è lo spazio congiungente i punti $\underset{j}{A}, \underset{j}{A'}, \cdots, \underset{j}{A^{(p)}}$ ($j = 1, \cdots, k+1$).

da cui, per la (2.1), seguono le:

$$(2.4_j) \qquad \underset{j}{A}^{(h)} = \underset{j}{\lambda}{}_q^i \underset{i}{A}^{(q)} \qquad (q = 0, \cdots, h-1 \;;\; i = 1, 2, 3 \;;\; j = 1, 2)$$

dove s'intenda di sommare rispetto agli indici ripetuti.

Nelle dette condizioni, lo S_{3h} di $h+1$ piani i.v. della $V_3^{(2;h;1)}$ è individuato dallo $S_{3h-1} \equiv [\pi, \pi', \cdots, \pi^{(h-1)}]$ e dal punto $\underset{3}{A}^{(h)}$ e perciò:

$$(2.5) \qquad \| \underset{1}{A}\, \underset{2}{A}\, \underset{3}{A}\, \underset{1}{A'}\, \underset{2}{A'}\, \underset{3}{A'} \cdots \underset{1}{A}^{(h-1)}\, \underset{2}{A}^{(h-1)}\, \underset{3}{A}^{(h-1)}\, \underset{3}{A}^{(h)} \| \neq 0.$$

Detto $\underset{1}{A}$ il punto che descrive la quasi-asintotica $\gamma_{\nu_1+1,\nu}$ [5] di G, sussiste la (1.1). Si conviene inoltre di porre $\nu_1 = -1$ se G contiene una quasi-asintotica appartenente ad uno $S_{\nu-1}$, cioè se la (1.1) si riduce alla:

$$(2.6) \qquad \| \underset{1}{A}\, \underset{1}{A'} \cdots \underset{1}{A}^{(\nu)} \| = 0.$$

3. Osservato che due S_{3h-1} i.v. appartengono ad uno S_{3h} (coincidente con lo spazio di $h+1$ piani i.v.) e che pertanto essi s'intersecano secondo uno S_{3h-2}, segue che:

Gli ∞^1 S_{3h-1} *di h piani i.v. di una* $V_3^{(2;h;1)}$ *sono osculatori ad una curva* Γ (*o ad un cono*).

Come già in [2] e come sarà posto in evidenza al n. 4, si ha un cono con vertice incidente il generico piano della $V_3^{(2;h;1)}$ se e solo se la rigata G appartiene ad uno S_{2h-1}, ovvero ha 2° indice di sviluppabilità $\nu_1 = -1$; escludiamo per ora i casi sopra accennati.

Se si indica con D il generico punto di Γ, assegnata la $V_3^{(2;h;1)}$ e quindi note in particolare le (2.4_j) e le loro conseguenze differenziali, la curva Γ s'individua imponendo che lo $S^{(3h-1)}$ osculatore ad essa nel punto D coincida con lo $S_{3h-1} = [\pi, \pi', \cdots, \pi^{(h-1)}]$ [6].

Poiché lo S_{3h-1} osculatore a Γ contiene h piani i.v. della V_3, il generico piano $\pi(t)$ è immerso nello S_{2h} osculatore a Γ (e non in uno spazio osculatore di dimensione inferiore).

Indichiamo con α la dimensione minima dello spazio osculatore a Γ incidente $\pi(t)$ secondo una retta $\bar{g}$; ovviamente è $\alpha \leq 2h-1$. Inoltre, come si verifica analiticamente, si ha $\bar{g} \equiv g$ [7].

(5) Lo spazio (ν_1+1)–osculatore alla rigata G nel suo punto $\underset{1}{A}$ è lo spazio di dimensione minima contenente gli S_{ν_1+1} osculatori alle curve di G passanti per $\underset{1}{A}$; esso risulta individuato dai punti: $\underset{1}{A}, \underset{2}{A}, \underset{1}{A'}, \underset{2}{A'}, \cdots, \underset{1}{A}^{(\nu_1)}, \underset{2}{A}^{(\nu_1)}, \underset{1}{A}^{(\nu_1+1)}$.

La quasi-asintotica $\gamma_{\nu_1+1;\nu}$ è, per definizione, una curva di G tale che in ogni suo punto l'intersezione dello spazio (ν_1+1)–osculatore a G con lo spazio ν–osculatore alla curva abbia dimensione ν_1+2 (e quindi superiore all'ordinaria). Ciò è espresso analiticamente dalla (1.1).

(6) I calcoli sono del tutto analoghi a quelli svolti nella Nota [2] per il caso $h=2$.

(7) Ci si può rendere conto di ciò anche nel seguente modo. Siano π_k $(k=0, \cdots, h)$ $h+1$ piani i.v. della V_3, $\bar{g}_k$ la retta intersezione di π_k col corrispondente S_α osculatore a Γ, g_k la generatrice di G appartenente a π_k. Lo spazio congiungente le $h+1$ generatrici $\bar{g}_k$ è

Lo spazio $S_{\alpha+\nu-1}$ osculatore a Γ contiene ν generatrici i.v. di G: per la definizione di 1° indice di sviluppabilità ν di G, è $2\nu - 1 \leq \alpha + \nu - 1$ e quindi (n. 2): $h \leq \nu \leq \alpha$.

Osservato che la dimensione minima dello spazio osculatore a Γ cui appartengono $h+1$ generatrici i.v. di G è data da $\alpha + h$ (8), si ha che tale spazio contiene $\alpha - h + 1$ piani i.v. della V_3 e coincide, com'è immediato verificare, con lo spazio congiungente lo spazio $(\alpha - h)$-osculatore alla V_3 lungo $\pi(t)$ con lo spazio $(h-1)$-osculatore a G lungo $g(t)$ (9). Si ha pertanto:

Considerati lo spazio $(\alpha - h)$-osculatore alla $V_3^{(2;h;1)}$ lungo il piano $\pi(t)$ e lo spazio $(h-1)$-osculatore a G lungo la generatrice $g(t)$ appartenente a $\pi(t)$, il loro spazio congiungente contiene lo spazio h-osculatore a G lungo $g(t)$.

Nelle (2.4_j) deve perciò essere $\underset{j}{\lambda}{}_q^3 = 0$ per $q > \alpha - h \; (j = 1, 2)$.

Indichiamo ora con β la dimensione minima dello spazio osculatore a Γ incidente $\pi(t)$ in un punto P: ovviamente è $\beta \leq \alpha - 1$. Inoltre è $P \equiv \underset{1}{A}$, come si può verificare analiticamente.

Difatti, supposto $P \not\equiv \underset{1}{A}$, sia ad esempio $P \equiv \underset{2}{A}$ ($\underset{2}{A}$ è un punto generico della generatrice $g(t)$). Lo spazio ν-osculatore alla curva descritta da $\underset{1}{A}$ e lo spazio ν_1-osculatore alla curva descritta da $P \equiv \underset{2}{A}$ sono rispettivamente contenuti negli $S_{\alpha+\nu}$, $S_{\beta+\nu_1}$ osculatori a Γ (e non in spazi osculatori di dimensione inferiore). Dovrebbe quindi essere per la (1.1), essendo $a_{1,\nu} \neq 0$, $b_{1,\nu_1} \neq 0 : \beta + \nu_1 = \alpha + \nu$, il che è assurdo poiché $\beta < \alpha$, $\nu_1 < \nu$. Si ha quindi $P \equiv \underset{1}{A}$ e, ragionando come sopra, segue: $\beta + \nu = \alpha + \nu_1$, ossia: $\nu_1 = \nu + \beta - \alpha$.

Risultano pertanto giustificata la generazione delle $V_3^{(2;h;1)}$ e dimostrate le relative proprietà enunciate al n. 1.

Si osservi che, se $\nu = 2h - 1$ (caso più generale), è $\alpha = 2h - 1$ ed il 2° indice di sviluppabilità ν_1 di G coincide con la dimensione minima dello spazio osculatore a Γ incidente $\pi(t)$ in un punto.

4. Restano da esaminare i seguenti casi: *a*) la rigata G appartiene ad uno S_{2h-1}; *b*) la rigata G ha 2° indice di sviluppabilità $\nu_1 = -1$.

Il *caso a*) si presenta se e solo se nelle (2.4_j) si ha $\underset{j}{\lambda}{}_q^3 = 0 \; (j = 1, 2; q = 0, \cdots$ $\cdots, h-1)$. Gli S_{3h-1} di h piani i.v. della V_3 contengono $h+1$ generatrici i.v. di G e quindi la rigata G stessa: essi risultano pertanto osculatori ad un cono di vertice lo S_{2h-1} cui G appartiene. Il piano generico della V_3, contenuto nello S_{2h} osculatore al cono, passa per la generica generatrice di G, senza ulteriori condizioni.

contenuto nello $S_{\alpha+h}$ osculatore a Γ e, poiché $\alpha \leq 2h - 1$, nello S_{3h-1} osculatore. Questo spazio contiene anche la generatrice g_h e, supposto $\bar{g}_h \neq g_h$, si dedurrebbe che lo S_{3h-1} di h piani $\pi_0, \cdots, \pi_{h-1}$ i.v. della V_3 contiene due rette distinte di π_h, e quindi π_h stesso, contro l'ipotesi.

(8) E ciò anche nel caso in cui $\nu = h$, purché G non appartenga ad uno S_{2h-1}.

(9) Cfr. nota (4).

Viceversa, si consideri un cono di vertice S_μ (ossia di specie $\mu+1$) tale che lo S_{2h} ad esso osculatore contenga il generico piano $\pi(t)$ della $V_3^{(2;h;1)}$ ed il cui vertice intersechi $\pi(t)$ secondo una retta g: tale retta descrive una rigata G appartenente allo S_μ. Il 1° indice di sviluppabilità ν di G deve soddisfare alle condizioni: $\nu \geq h$; $2\nu - 1 \leq \mu < 2h$. Si ha quindi $\nu = h$, $\mu = 2h - 1$ e perciò:

Condizione necessaria e sufficiente perché la rigata G *associata alla* $V_3^{(2;h;1)}$ *appartenga ad uno* S_{2h-1} *è che il piano generico della* $V_3^{(2;h;1)}$ *sia immerso nello* S_{2h} *osculatore ad un cono di specie* $2h$.

Il *caso b*) si presenta se e solo se vale la (2.6), cioè se e solo se G contiene una $\gamma_{0,\nu}$. Gli S_{3h-1} di h piani i.v. della $V_3^{(2;h;1)}$ contengono la $\gamma_{0,\nu}$ e sono pertanto osculatori ad un cono di vertice lo $S_{\nu-1}$ cui $\gamma_{0,\nu}$ appartiene.

Il generico piano $\pi(t)$ della $V_3^{(2;h;1)}$ è contenuto nello S_{2h} osculatore al cono. Si possono distinguere vari sottocasi in relazione alla dimensione minima dello spazio osculatore al cono incidente $\pi(t)$ secondo una retta; così, per esempio, per $h = 2$ si hanno tre casi (cfr. [2]).

Viceversa, si consideri un cono il cui S_{2h} osculatore contenga il piano $\pi(t)$ della $V_3^{(2;h;1)}$; supposto che il vertice S_μ del cono intersechi $\pi(t)$ in un punto (e perciò $\mu \leq 2h - 2$), si ha che la rigata G associata alla V_3 contiene una curva di S_μ e ne consegue: $\nu = \mu + 1$, $\nu_1 = -1$. Poiché $\nu \geq h$, deve essere $\mu \geq h - 1$. Si può quindi affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente perché la rigata G *associata alla* $V_3^{(2;h;1)}$ *abbia 2° indice di sviluppabilità* $\nu_1 = -1$ *è che il piano generico* $\pi(t)$ *della varietà sia immerso nello* S_{2h} *osculatore ad un cono, il cui vertice* (*di dimensione* $\mu \geq h - 1$) *intersechi* $\pi(t)$ *in un punto.*

BIBLIOGRAFIA.

[1] E. BOMPIANI, *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi*, « Rend. Circ. Mat., Palermo » (1914).

[2] A. SANINI, *Su una classe di varietà* V_3 *luogo di* ∞^1 *piani*. In corso di stampa sui « Rend. di Mat., Roma ».