Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Lippi

Sugli elementi uniti nelle collineazioni dei piani liberi e dei piani aperti. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 233–237.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_233_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Geometria. — *Sugli elementi uniti nelle collineazioni dei piani liberi e dei piani aperti.* Nota I di MARCO LIPPI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — After having recalled some well known results on free and open projective planes, I prove some lemmas about the existence of a minimal free generator of a plane containing a given set of free generators. These results will be employed in another paper (« Nota II », to appear in these « Rendiconti » under the same title), where the configuration formed by the elements of a free projective plane which are left invariant under a collineation will be investigated.

In [1] il Baer ha dimostrato che:

Le collineazioni di periodo 2 di un piano proiettivo qualsiasi o sono omologie (speciali o generali), oppure ammettono come sottopiano degli elementi uniti un sottopiano proiettivo massimale.

In una successiva « Nota II » dimostrerò che i sottopiani proiettivi massimali dei piani aperti non sono finitamente generati; inoltre, utilizzando tale risultato ed il teorema di Baer, proverò che il sottopiano degli elementi uniti di una qualsiasi collineazione di periodo 2^i $(i \geq 1)$ di un piano aperto è un sottopiano proiettivo non finitamente generato. Nella presente Nota verranno succintamente esposti – con varie osservazioni complementari – quegli elementi della teoria dei piani aperti e dei piani liberi che saranno utilizzati nella « Nota II ». Le due Note riassumono la Tesi di laurea da me sostenuta l'11 novembre 1965 presso l'Università di Roma.

1. Una terna costituita da un insieme di punti, un insieme di rette ed una relazione di incidenza tra essi chiamasi un *piano parziale* se, per due punti distinti qualsiansi (del primo insieme) passa al più una retta (del secondo insieme, a quelli incidente) e se due rette distinte hanno al più un punto in comune.

Chiamerò indifferentemente *elementi* di un piano parziale i suoi punti e le sue rette.

Se per due punti distinti passa sempre una ed una sola retta e due rette distinte hanno uno ed un solo punto in comune, il piano parziale dicesi un *piano completo*. Un piano completo chiamasi *non degenere* se contiene un quadrangolo non degenere, altrimenti *degenere*.

La nozione di piano completo non degenere coincide con quella di piano grafico irriducibile (vedi [7], p. 143), ossia di *piano proiettivo*.

Sono ovvie le definizioni di *sottopiano parziale* di un piano parziale assegnato (e quindi, in particolare, di un piano proiettivo assegnato), nonché di

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

collineazione di un piano parziale su d'un altro. Se M ed N sono piani parziali tali che esista una collineazione di M su N, si dirà che M ed N sono *isomorfi*. Ove ciò non dia luogo a confusione parlerò semplicemente delle collineazioni di un piano parziale, invece che delle sue collineazioni in sé.

Per i sottopiani completi (degeneri o proiettivi) di un piano completo userò la denominazione ellittica di *sottopiani*. Se f è una collineazione del piano completo π, indicherò con π_f il sottopiano parziale di π degli elementi lasciati fissi da f. È chiaro che π_f risulta sempre un sottopiano di π.

Sia π un piano completo ed M un suo sottopiano parziale. Detto M^+ l'insieme degli elementi di π incidenti con almeno due elementi distinti di M, sia $M_1 = M \cup M^+$. Posto $M_0 = M$ e $M_n = M_{n-1} \cup M_{n-1}^+$, si ha che $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ è un sottopiano di π: questo dicesi generato entro π da M, e lo si indica con $[M]_\pi$; si conviene allora di dire che M è un *generatore* di $[M]_\pi$. Un piano completo dicesi *finitamente generato* se esiste un suo sottopiano parziale finito M tale che $[M]_\pi = \pi$.

Sia x un elemento di $[M]_\pi$ e si denoti con h il minimo intero per cui x è un elemento di M_h. Tale intero h $(h \geq 0)$ chiamasi l'M–stadio di x e lo si indica con $s_M(x)$.

Sia x un qualunque elemento di $[M]_\pi$ di M–stadio $h > 0$; per definizione, esso è allora incidente con almeno due elementi di M–stadio $< h$. Se tali elementi sono esattamente in numero di due ed x non è incidente con alcun elemento di M–stadio h, si dice che x è M–libero. Se tutti gli elementi dell'insieme $[M]_\pi — M$ sono M–liberi, si dice che $[M]_\pi$ è *generato liberamente* da M e che M è un *generatore libero* di $[M]_\pi$. Sussiste, a proposito delle nozioni dianzi introdotte, il seguente:

TEOREMA 1 (Hall [4]).

i) *Esiste ed è unico (a meno di collineazioni) il piano completo generato liberamente da un piano parziale* M.

ii) *Siano* M^1 *ed* M^2 *piani parziali,* π_1 *e* π_2 *piani completi generati liberamente, rispettivamente, da* M^1 *e da* M^2. *Se* f_0 *è una collineazione di* M^1 *su* M^2, *esiste ed è unica la collineazione di* π_1 *su* π_2 *che prolunga la* f_0.

In particolare, nella ii) del teorema 1, può naturalmente essere $M^1 = M^2$, $\pi_1 = \pi_2$, nel qual caso f risulta una collineazione di π_1 in sè.

Si dice che il piano parziale M è degenere se il piano completo generato liberamente da M è degenere, altrimenti non degenere. La definizione ha senso per l'unicità asserita nella i) del teorema 1. Se, in particolare, M è un piano completo, il piano completo di cui si afferma l'esistenza nella i) del teorema 1 è M stesso.

LEMMA 1. – *Sia* M *un piano parziale non completo e* π *denoti il piano completo generato liberamente da* M. π *è degenere se, e solo se, esiste un intero* h *tale che, per ogni* x *di* π, $s_M(x) \leq h$.

Dimostrazione. – Sia h l'intero massimo tra gli M–stadi degli elementi di π. Poiché M non è completo, $h > 0$. Sia x in π e sia $s_M(x) = h$. Per ipotesi, x è M–libero, dunque incidente con esattamente due elementi di π di M–stadio minore di h e con nessuno di M–stadio h. D'altra parte, dalla definizione di h segue che tali due elementi sono gli unici di π incidenti con x. Dunque π risulta riducibile ed è quindi degenere.

Per il viceversa, sia π un piano completo degenere generato liberamente dal suo sottopiano parziale M. Esaminati i vari casi possibili (si tenga presente la classificazione dei piani completi degeneri in [4]), si constata la validità del lemma con $h = 2$.

Immediata conseguenza del lemma 1, dianzi stabilito, è il:

LEMMA 2. – *Sia* M *un piano parziale finito non completo e* π *denoti il piano completo generato liberamente da* M. π è *finito se, e solo se,* M è *degenere.*

2. Siano M ed N piani parziali contenuti nel piano proiettivo π generato liberamente da M. Si dice che N è un'*estensione libera* di M, se N contiene M ed inoltre, insieme ad ogni elemento x di M–stadio h, contiene i due elementi di M–stadio $< h$ incidenti con x. Vale in proposito il seguente.

LEMMA 3 (Pickert [6], p. 17). – *Siano* M *ed* N *piani parziali contenuti nel piano proiettivo* π *generato liberamente da* M *e sia* $N \supseteq M$. *Allora* N *è un generatore libero di* π *se, e solo se,* N *è un'estensione libera di* M.

In particolare, ciascuno degli insiemi $M_1 = M_0 \cup M_0^+, \cdots, M_n, \cdots$ risulta un generatore libero di π. Stabiliremo inoltre il:

LEMMA 4. – *Sia* $\{M^i\}_{i \in I}$ *un insieme qualsiasi di generatori liberi del piano proiettivo* π, *ed* M *denoti l'intersezione di tutti i generatori liberi di* π *contenenti* $\bigcup_{i \in I} M^i$. *Allora* M *è un generatore libero di* π.

Dimostrazione. – Sia j un fissato elemento di I. In virtù del lemma 3 e del fatto che $M^j \subseteq M$, basta stabilire che M è un'estensione libera di M^j. Sia x un elemento di M di M^j–stadio h e siano y e z gli elementi di M^j–stadio $< h$ incidenti con x, e si supponga, per assurdo, che y non appartenga ad M. In forza della definizione di M, ciò implica l'esistenza di un generatore libero di π, sia N, contenente $\bigcup_{i \in I} M^i$, ma non contenente y. Per il lemma 3, N è un'estensione libera di M^j, sicché N, non contenendo y, non può contenere x. Ma ciò contrasta col fatto che x è un elemento di M, onde l'asserto.

Il generatore libero M di cui si afferma l'esistenza nel lemma 4, ossia il minimo generatore libero contenente $\bigcup_{i \in I} M^i$, può anche coincidere con l'intero π.

LEMMA 5. – *Se* I *è finito e se gli* M^j *sono finiti, anche* M *è finito.*

DIMOSTRAZIONE. – Fissato, come nel lemma 4, M^j, per le ipotesi di finitezza fatte, esiste un intero n tale che $(M^j)_n \supseteq \bigcup_{i \in I} M^i$; $(M^j)_n$ è un generatore libero di π ed è finito; da ciò l'asserto.

Si verifica facilmente che il trasformato di un generatore libero mediante una collineazione è ancora un generatore libero.

LEMMA 6. – *Sia* f *una collineazione di* π *e sia* N *il minimo generatore libero contenente* $\bigcup_{i \in I} f(M^i)$. *Si ha* $f(M) = N$.

Dimostrazione. – $f(\mathrm{M})$ è un generatore libero di π contenente $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} f(\mathrm{M}^i)$. Da ciò segue che $f(\mathrm{M}) \supseteq \mathrm{N}$. Se si avesse $f(\mathrm{M}) \supset \mathrm{N}$ si avrebbe anche $\mathrm{M} \supset f^{-1}(\mathrm{N})$. D'altra parte, $f^{-1}(\mathrm{N})$ è un generatore libero di π in quanto trasformato, mediante una collineazione, di N. Ma ciò è assurdo per il significato di M, e per il fatto che $f^{-1}(\mathrm{N}) \supseteq \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{M}^i$.

3. Siano M ed N piani parziali e sia $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$. M dicesi *completo* in N se contiene ogni elemento di N incidente con due distinti elementi di M. Siano sempre M ed N piani parziali e sia $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$. Dicesi *completamento* di M in N l'intersezione di tutti i sottopiani parziali di N, completi in N, contenenti M. Tale completamento è, ovviamente, completo in N. Si noti che, se π è un piano completo ed M un suo sottopiano parziale, $[\mathrm{M}]_\pi$ è il completamento di M in π. Dalla definizione di completezza segue subito il:

LEMMA 7. – *Sia* M *completo in* N *ed* N *sia un sottopiano parziale di* H. *Se gli elementi di* $\mathrm{H} - \mathrm{N}$ *sono incidenti con al più un elemento di* M, *allora* M *è completo in* H.

LEMMA 8 (Hall [4]).

i) *Sia* π *un piano proiettivo generato liberamente da* M *e sia* N *un sottopiano parziale di* M, *completo in* M. *In tal caso* $[\mathrm{N}]_\pi$ *è generato liberamente da* N.

ii) *Sia* π *generato liberamente da* M *e sia* N *un sottopiano parziale di* M. $[\mathrm{N}]_\pi$ *è generato liberamente dal completamento di* N *in* M.

Un piano parziale non vuoto dicesi *irriducibile* se è finito, se ogni suo punto è incidente con almeno tre rette e se ogni sua retta è incidente con almeno tre punti. I piani parziali irriducibili sono non degeneri.

Un piano parziale dicesi *aperto* se è finito e se non contiene piani parziali irriducibili. Un piano proiettivo dicesi *aperto* se non contiene piani parziali irriducibili. Un piano proiettivo finito è un piano parziale irriducibile: dunque un piano proiettivo aperto è certamente infinito. È ovvio che i sottopiani proiettivi dei piani proiettivi aperti sono aperti.

Indicherò nel seguito con A_n, ove n sarà un numero cardinale qualsiasi, un piano parziale costituito da una retta, $n - 2$ punti su di essa e due punti fuori di essa. Un A_n è un piano parziale aperto non degenere. Un piano proiettivo generato liberamente da un A_n si dirà un *piano libero*.

TEOREMA 2 (Hall [4]). – *I piani proiettivi liberi sono aperti.*

TEOREMA 3 (Kopejkina [5]). – *I sottopiani proiettivi dei piani liberi sono liberi.*

Si dànno esempi di piani proiettivi aperti che non sono liberi (vedi [3]).

Siano M^1 ed M^2 piani parziali finiti non degeneri. Siano π_1 e π_2 piani proiettivi generati liberamente, rispettivamente, da M^1 e da M^2. M^1 ed M^2 si dicono L–*equivalenti* se π_1 e π_2 sono isomorfi. Due generatori liberi finiti di un piano proiettivo sono L–equivalenti come segue subito dalla precedente definizione.

Se il piano parziale finito M contiene a punti, b rette ed i bandiere (coppie punto–retta incidenti) dicesi rango di M il numero $r(\mathrm{M}) = 2(a + b) - i$.

Sussiste in proposito il seguente:

LEMMA 9 (Hall [4]). – *Due piani parziali finiti* L–*equivalenti hanno lo stesso rango.*

TEOREMA 4 (Hall [4]). – *Sia* M *un piano parziale aperto non degenere.* M *è* L–*equivalente ad un* A_n *con* $n = r(M) - 4$.

Un piano libero generato da un A_n con n finito (piano libero finitamente generato) sarà indicato con π^n. Sussiste in proposito il seguente:

TEOREMA 5 (Hall [4]). – *Un piano proiettivo aperto finitamente generato è libero, ossia è un* π^n, *con un* n *opportuno.*

Dal teorema 5 o, se si vuole, dal teorema 3 si trae che un sottopiano finitamente generato di un piano aperto e quindi, in particolare, di un π^n è un π^m dove si dimostra m poter essere qualsiasi, purché ≥ 4. In un piano libero finitamente generato esistono sottopiani proiettivi non finitamente generati (vedi [3]). Essi sono comunque, per il teorema 3, piani liberi.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BAER R., *Projectivities with fixed points on every line of the plane*, « Bull. Amer. Math. Soc. », 273–286 (1946).

[2] BAER R., *Projectivities of finite projective planes*, « Amer. J. Math. », *69*, 653–684 (1947),

[3] DEMBOWSKI P., *Freie und offene projektive Ebenen*, « Math. Z. », *72*, 410–438 (1960).

[4] HALL M., *Projective planes*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *54*, 229–277 (1943).

[5] KOPEJKINA L. I., *Freie Zerlegungen von projektiven Ebenen*, « Isv. Akad. Nauk. SSSR. ». *9*, 410–448 (1945).

[6] PICKERT G., *Projektive Ebenen*, Berlin, Springer, 1955.

[7] SEGRE B., *Lectures on modern Geometry*, Edizioni Cremonese, 1961.