Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Claudio Pedrini

Gruppi transitivi di sostituzioni e t-reti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 226–232.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_226_0>

Geometria. — *Gruppi transitivi di sostituzioni e t–reti.* Nota di CLAUDIO PEDRINI, presentata [(*)] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A necessary condition is given for the existence of a strictly transitive set of substitutions on n elements, of transitivity index t, where $4 \leq t \leq n-3$. The result is obtained as a consequence of a theorem on the existence of non trivial t–nets of order n.

Nella presente Nota [(1)] vien stabilita una condizione necessaria per l'esistenza di un insieme I strettamente transitivo di sostituzioni; e si noti che non si esige che I sia un gruppo. Più precisamente, se I opera su n elementi ed ha indice di transitività t, dall'essere $4 \leq t \leq n-3$ segue la congruenza $n-t \equiv \pm 1 \pmod 6$. Questo risultato vien qui ottenuto sotto forma di un teorema sull'esistenza di t–reti d'indice 1 e grado n.

1. ALCUNE NOZIONI SULLE t–RETI. – Il professor B. Segre, nelle sue *Lezioni di Istituzioni di Geometria Superiore per l'anno accademico 1963–64* [3] ha esposto una teoria generale dei sistemi di blocchi di un insieme finito; rimandando a tale testo (vedasi anche [1]) per una trattazione più completa, ci limiteremo, nel presente numero e al principio del numero 2, a richiamare alcune nozioni essenziali per il seguito.

Sia $P = X \times Y$, con $|X| = |Y| = n$, un insieme finito contenente n^2 elementi, che diremo punti: in relazione a tale «piano» P risultano definiti due sistemi di generatori e vengono detti indipendenti due punti che non stiano su di un medesimo generatore. Chiamiamo *blocco* f del piano P ogni insieme di n punti unisecante i generatori di P. Una *rete di grado* n è allora un insieme $\{f\}$ di blocchi di P. Una rete K è sempre derivabile da un *insieme di sostituzioni* su n elementi, nel senso che, considerato un blocco $h \in K$ e posto $s = h^{-1}f$, risulta $\{f\} = hS$ ove S è l'insieme di sostituzioni su X descritto da s al variare di f in K. In casi particolari, l'insieme S può naturalmente essere un *gruppo* di sostituzioni.

A partire da insiemi t–transitivi di sostituzioni si ottengono le t–reti; una di queste è dunque tale che, comunque si fissino t punti indipendenti di P, esistono esattamente k suoi blocchi che li contengono. Nel seguito ci limiteremo a considerare il caso in cui $k = 1$, cioè quello delle t–reti in senso stretto, e denoteremo con $K_{t,n}$ una t–rete di grado n e indice $k = 1$.

Si pone allora il problema dell'esistenza di qualche $K_{t,n}$ per dati valori di t e n, soddisfacenti l'ovvia condizione $t \leq n$. Diremo banale una $K_{t,n}$ per cui $t \geq n-2$.

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

(1) Che espone alcuni risultati della tesi di laurea discussa dall'autore presso l'Università di Roma (novembre 1965).

Per $t = 2$, tale problema è strettamente collegato con quello dell'esistenza di piani grafici finiti (cfr. B. Segre [3], 20–5–7). B. Segre ha dimostrato ([3], 20–6–15) l'esistenza di $K_{3,n}$ tali che la 2–rete ottenuta imponendo un punto (cfr. [3], p. 78) sia non desarguesiana: negli esempi da lui addotti, una siffatta 3–rete risulta derivabile da un gruppo. Oggetto di una mia prossima Nota sarà la costruzione di una classe di 3–reti non derivabili da un gruppo.

In base ad un noto teorema di Jordan ([2]) sui gruppi di sostituzioni 4–transitivi d'indice dispari, esiste una sola 4–rete (in senso stretto) non banale, derivabile da un gruppo: quella associata al gruppo di Mathieu M_{11}.

B. Segre ha dimostrato in [3] una condizione necessaria cui debbono soddisfare gli interi t e n affinché esista qualche $K_{t,n}$. Applicandola a taluni valori particolari di t e n si prova la non esistenza di nessuna $K_{4,9}$, $K_{4,10}$, $K_{6,13}$, derivabile o meno da un gruppo (cfr. [3], 20–7–11) (2).

2. UN TEOREMA SULL'ESISTENZA DI $K_{t,n}$ NON BANALI. – Sia $K_{t,n}$ una t–rete d'ordine n e si denoti con f_0 un suo blocco qualsiasi; indicato con N_i $(0 \leq i \leq t - 1)$ il numero dei blocchi di $K_{t,n}$, distinti da f_0, e aventi esattamente i punti in comune con f_0, risulta:

$$
(1) \qquad \begin{cases}
N_{t-1} = \binom{n}{t-1}[(n-t+1)-1], \\
N_{t-2} = \binom{n}{t-2}[(n-t+2)(n-t+1)-1] - \binom{t-1}{t-2} N_{t-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
N_1 = \binom{n}{1}[(n-1)(n-2)\cdots(n-t+1)-1] - \\
\qquad\qquad - \binom{2}{1} N_2 - \cdots - \binom{t-1}{1} N_{t-1}, \\
N_0 = N - 1 - \sum_{i=1}^{t-1} N_i
\end{cases}
$$

ove $N = n(n-1)(n-2)\cdots(n-t+1)$ designa il numero dei blocchi di $K_{t,n}$.

In relazione al blocco f_0, le coppie (A, B) di punti indipendenti del piano P su cui è tracciata $K_{t,n}$, che non giacciono su f_0, possono venire classificate in base al *numero* $\lambda(A, B)$ dei punti distinti secondo cui i generatori per A e B segano f_0. Più precisamente, diremo (con B. Segre) che la coppia (A, B) è di I, II, o III tipo rispetto a f_0 a seconda che $\lambda(A, B)$ sia eguale rispettivamente a 4, 3, 2. Una coppia di III tipo è costituita da punti distinti simmetrici rispetto a f_0, e viceversa (ogni blocco $f \in K_{t,n}$ definisce una simmetria σ_f del piano P: cfr. [3], 30–3–6).

Definiamo poi, in relazione ad f_0, i seguenti caratteri (per $0 \leq i \leq t - 1$):

r_i = numero dei blocchi di $K_{t,n}$ passanti per una fissata coppia (A, B), di I tipo rispetto a f_0, aventi ciascuno esattamente i punti a comune con f_0;

(2) Nella tesi di laurea sopra citata, mediante l'applicazione di tale diseguaglianza, trovasi inoltre dimostrata la non esistenza di nessuna $K_{4,12}$, $K_{4,14}$, $K_{4,16}$.

u_i = numero dei blocchi di $K_{t,n}$ passanti per una fissata coppia (A, B), di II tipo rispetto a f_0, aventi ciascuno esattamente i punti a comune con f_0;

s_i = numero dei blocchi di $K_{t,n}$ passanti per una fissata coppia (A, A′) di punti simmetrici rispetto a f_0, aventi ciascuno esattamente i punti a comune con f_0.

Dalla definizione si ha che – per una data rete $K_{t,n}$ – gli interi non negativi r_i risultano a priori funzioni del blocco f_0 e della coppia (A, B) considerati; ed analogamente per u_i e s_i. In relazione ad ogni blocco di $K_{t,n}$ e ad ogni coppia risulta:

$$\sum_{i=0}^{t-1} r_i = \sum_{i=0}^{t-1} u_i = \sum_{i=0}^{t-1} s_i = (n-2)(n-3)\cdots(n-t+1).$$

Dimostriamo il seguente

TEOREMA. – *Se* $K_{4,n}$ *è una 4-rete non banale, onde risulta* $n \geq 7$, *considerati un qualsiasi blocco* f *di* $K_{4,n}$ *ed una qualunque coppia* (A, A′) *di punti distinti simmetrici rispetto a* f, *non esiste nessun blocco di* $K_{n,4}$ *che contenga* (A, A′) *ed abbia esattamente due punti in comune con* f, *ossia:* $s_2 = 0$.

Dimostrazione. – Supposta esistente una 4-rete non banale $K_{4,n}$ siano f_0 un blocco di $K_{4,n}$, comunque fissato e f un qualsiasi blocco esattamente bisecante f_0. Indicato con c_i $(i = 1, 2, 3)$ il numero delle coppie (ordinate) di punti situati su f, di i-esimo tipo rispetto a f_0, si ha:

$$c_1 = (n-2)(n-5) + c_3. \tag{2}$$

Sia infatti A un punto di f tale che il suo simmetrico A′ rispetto a f_0 non appartenga a f; detti allora M, N i punti costituenti $f \cap f_0$ ed H, K le intersezioni dei generatori passanti per A con il blocco f_0, siano H′, K′ i punti comuni a f e ai generatori passanti per H, K e non contenenti A. Risulta allora $H' \neq K'$; comunque si prenda un punto B su f distinto da A, M, N, H′, K′, la coppia (A, B) è di I tipo rispetto a f_0. Si possono pertanto formare $n-5$ coppie di punti di f aventi A come primo elemento e di I tipo rispetto a f_0. Se invece $A' \in f$, di coppie siffatte ne esistono $n-4$: al variare di A nell'insieme degli $n-2$ punti di f non situati su f_0 si trova la (2).

Poiché il numero delle coppie ordinate di punti di f non appartenenti a f_0 è $(n-2)(n-3)$ risulta inoltre:

$$c_1 + c_2 + c_3 = (n-2)(n-3). \tag{3}$$

Poiché la (2) e la (3) non dipendono dal particolare blocco f scelto, sommando le relazioni fornite dalle (2), (3) al variare di f nell'insieme degli N_2 blocchi di $K_{4,n}$ bisecanti f_0, si ottengono le:

$$\begin{cases} C_1 = N_2 (n-2)(n-5) + C_3, \\ C_1 + C_2 + C_3 = N_2 (n-2)(n-3), \end{cases} \tag{4}$$

ove si è indicato con C_i il numero complessivo delle coppie ordinate di i-esimo tipo (rispetto a f_0) situate sui vari blocchi di $K_{4,n}$ bisecanti f_0, ciascuna coppia essendo contata tante volte quanto è il numero dei blocchi bisecanti f_0 che la contengono. In base alla definizione dei caratteri r_i, u_i, s_i risulta allora:

$$C_1 = \sum_{(A,B)} r_2 \quad , \quad C_2 = \sum_{(A,B)} u_2 \quad , \quad C_3 = \sum_{(A,A')} s_2 \, , \tag{5}$$

ove le tre somme considerate vanno estese all'insieme delle coppie di punti rispettivamente di I, II e III tipo rispetto al fissato blocco f_0 (e similmente nel seguito).

Poiché in tutte le considerazioni fin qui svolte la scelta del blocco f_0 era del tutto arbitraria, facendo variare f_0 tra gli $N = n(n-1)(n-2)(n-3)$ blocchi di $K_{4,n}$, dalle relazioni (4), tenendo conto anche delle (5), si ricavano sommando le altre:

$$\begin{cases} X - Z = N\,N_2\,(n-2)(n-5)\,, \\ X + Y + Z = N\,N_2\,(n-2)(n-3)\,, \end{cases} \tag{6}$$

avendo posto:

$$X = \sum_{f_0 \in K_{4,n}} \sum_{(A,B)} r_2 \quad , \quad Y = \sum_{f_0 \in K_{4,n}} \sum_{(A,B)} u_2 \quad , \quad Z = \sum_{f_0 \in K_{4,n}} \sum_{(A,A')} s_2$$

(si rammenti che i caratteri r_i sono funzioni definite nell'insieme delle coppie $\{f_0, (A, B)\}$, con (A, B) di I tipo rispetto a f_0; analogamente per u_i e s_i).

Sia ora (A, B) una qualsiasi coppia di punti indipendenti del piano P su cui è tracciata $K_{4,n}$, e siano A', B' i loro coniugati (cfr. [3], 20-3-2). Considerato un blocco $f_0 \in K_{4,n}$ passante per A e B, tutti blocchi f di $K_{4,n}$ bisecanti f_0, non contenenti nè A nè B e passanti per uno dei due punti A', B' (ma non per entrambi), sono tali che:

(a) (A, B) è di II tipo rispetto a f;

(b) $u_2[(A, B), f] > 0$.

Invero, la (a) segue subito dalle precedenti definizioni e la (b) è evidente in quanto, per ipotesi, il blocco f_0 contiene la coppia (A, B) ed è bisecante f.

Indichiamo con N^* il numero dei blocchi f di $K_{4,n}$ verificanti le proprietà (a) e (b) (con che N^* risulta una funzione della coppia (A, B) e del blocco f_0 fissati). Dimostriamo la relazione:

$$\sum_{f_0 \in K_{4,n}} \sum_{(A,B)} u_2 = \sum_{(A,B)} \sum_{f_0 \in K_{4,n}}^{(A,B) \in f_0} N^* \tag{7}$$

(ove a primo membro si somma rispetto alle coppie (A, B) di II tipo rispetto a f e a secondo membro rispetto a tutte le coppie di punti indipendenti del piano P; analogamente nel seguito). Siano f un blocco di $K_{4,n}$ ed (A, B) una coppia di II tipo rispetto a f: il blocco f e la coppia (A, B) vengono contati nella somma a primo membro della (7) tante volte quant'è il numero dei blocchi passanti per (A, B) e bisecanti f, cioè $u_2[(A, B), f)]$; d'altronde lo stesso numero di volte il blocco f compare nella somma a secondo membro, in quanto sono u_2 i blocchi f_0 passanti per (A, B) rispetto ai quali f verifica le proprietà (a) e (b), onde la (7), ossia:

$$Y = \sum_{(A,B)} \sum_{f_0 \in K_{4,n}}^{(A,B)\in f_0} N^* .$$

Valutiamo ora N^*. I blocchi passanti per A′ ed aventi 3 punti in comune con f_0 (distinti da A e da B) sono in numero di $\binom{n-2}{3}$ e quindi quelli contenenti A′ e bisecanti f_0 sono in numero di:

$$(n-3)\binom{n-2}{2} - 3\binom{n-2}{3} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} .$$

Poiché $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ è altresì il numero dei blocchi contenenti B′ e aventi esattamente due punti in comune con f_0, si ha:

$$N = (n-2)(n-3) - s'_2 ,$$

ove si è indicato con s'_2 il numero dei blocchi di $K_{4,n}$ bisecanti f_0 e contenenti la coppia (A′, B′), la quale è di III tipo rispetto ad ogni blocco passante per A e B. Risulta pertanto:

$$Y = \sum_{(A,B)} \sum_{f_0 \in K_{4,n}}^{(A,B)\in f_0} [(n-2)(n-3) - s'_2] ;$$

sicché, essendovi $(n-2)(n-3)$ blocchi di $K_{4,n}$ contenenti la coppia (A, B) ed $n^2(n-1)$ coppie di punti indipendenti di P, si trova:

$$Y = n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2 - \sum_{(A,B)} \sum_{f_0 \in K_{4,n}}^{(A,B)\in f_0} s'_2 . \tag{8}$$

Atteso il significato dell'intero s'_2, si ha poi:

$$Z = \sum_{(A,B)} \sum_{f_0 \in K_{4,n}}^{(A,B)\in f_0} s'_2 ; \tag{9}$$

e poiché $n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2 = N^2$, dalle (8), (9) si ricava:

$$Y + Z = N^2. \tag{10}$$

Calcoliamo N_2 dalle (1) ponendovi $t = 4$:

$$N_2 = \frac{n(n-1)(n-3)}{2} .$$

Tenuto conto dell'espressione così trovata per N_2, le (6) e la (10) equivalgono al seguente sistema lineare nelle incognite X, Y, Z:

$$\begin{cases} Y + Z = N^2 \\ X + Y + Z = N^2 \dfrac{(n-3)}{2} \\ X - Z = N^2 \dfrac{(n-5)}{2} \end{cases}$$

il quale porge:

$$X = N^2 \frac{(n-5)}{2} \quad , \quad Y = N^2 \quad , \quad Z = 0 .$$

L'ultima relazione si scrive più esplicitamente:

$$\sum_{f_0 \in K_{4,n}} \sum_{(A,A')} s_2 = 0 ;$$

sicché, essendo per definizione $s_2 \geq 0$, segue che, comunque si scelgano un blocco $f_0 \in K_{4,n}$ ed una coppia (A, A') di punti simmetrici rispetto a f_0 risulta $s_2 = 0$ e cioè – come asserito – non esiste nessun blocco di $K_{4,n}$ passante per (A, A') ed esattamente bisecante f_0.

3. ALCUNE CONSEGUENZE. – Dal teorema del n. 2 si ricavano, come vedremo, due corollari.

Ad ogni $K_{4,n}$ *con* $n \geq 7$ *è associato un sistema di Steiner* $\mathcal{S}(2, 3, n-2)$; *pertanto affinché esista una* $K_{4,n}$ *non banale è necessario che risulti:*

$$n \equiv 3 \quad \textit{oppure} \quad n \equiv 5 \pmod 6 .$$

Dimostrazione. – Supposta esistente una $K_{4,n}$, con $n \geq 7$, siano f_0 un blocco arbitrario di $K_{4,n}$ ed (A, A') una qualsiasi coppia di punti distinti simmetrici rispetto a f_0. Scelta su f_0 una coppia (B, C) di punti indipendenti da A, per i quattro punti A, A', B, C passa uno e un solo blocco $f \in K_{4,n}$. In base al teorema, tale blocco non può essere bisecante f_0: esiste dunque almeno un punto D, distinto da B e da C, appartenente a $f \cap f_0$; ma si noti che $f \cap f_0$ non può contenere quattro punti distinti, poiché – altrimenti – f e f_0 coinciderebbero, mentre invece f passa per i punti A, A' che non stanno su f_0. Il punto D, così ottenuto a partire dalla coppia B, C, è unico: se infatti esistesse un altro blocco, f', contenente A, A', B, C e intersecante ulteriormente f_0 in un punto D' diverso da D, per i quattro punti indipendenti A, A', B, C passerebbero due blocchi distinti di $K_{4,n}$, il che non può essere per la definizione di 4-rete. Indicato con α l'insieme degli $n-2$ punti di f_0 indipendenti da A, le terne di punti di α costituite dalle intersezioni con f_0 dei vari blocchi contenenti (A, A') e trisecanti f_0 formano dunque un sistema di terne di Steiner $\mathcal{S}(2, 3, n-2)$, onde l'asserto.

Condizione necessaria affinché esista una $K_{t,n}$, *con* $4 \leq t \leq n-3$, *è che risulti*:

$$n - t \equiv \pm 1 \pmod 6 . \tag{11}$$

Dimostrazione. – Supposta esistente una $K_{t,n}$ non banale, con $t \geq 4$ (tale cioè che risulti $4 \leq t \leq n-3$), imponendo ad essa quattro punti indipendenti si ottiene una $K_{4,n-t+4}$. L'intero $n-t+4$ deve pertanto soddisfare all'una o all'altra condizione espressa dal precedente corollario, onde l'asserto.

Sia ora H un insieme di sostituzioni su n elementi strettamente transitivo di indice t. Considerato H come una 4-rete del piano $P = X \times X$, con

$|X| = n$, dall'ultima proposizione si ricava che gli interi n e t debbono soddisfare alla (11).

Osserviamo infine, che, in base al primo corollario la possibilità di ampliare un piano affine d'ordine n in una 4-rete d'ordine $n+2$ (cfr. [3], 20-7) è limitata a quei valori di n tali che:

$$n + 2 \equiv 3 \qquad \text{oppure} \qquad n + 2 \equiv 5 \qquad (\text{mod } 6).$$

Bibliografia.

[1] Ceccherini P. V., *Alcune osservazioni sulla teoria delle reti*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. 8ª, 40, 218 (1966).

[2] Jordan C., *Recherches sur les substitutions*, « J. Math. Pures Appl. », (2) XVII, 351-363 (1872).

[3] Segre B., *Lezioni di istituzioni di geometria superiore per l'anno accademico 1963-1964* (raccolte dal dott. P. V. Ceccherini), Vol. III, Istituto Matematico Università di Roma, 1965.