Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Octav Onicescu

Un modello di campo probabilizzato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 215–217.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_215_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Matematica. — *Un modello di campo probabilizzato.* Nota di OCTAV ONICESCU, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

RÉSUMÉ. — Etant donné une algèbre de Boole Ω probabilisée, on définit un espace S et un champ de parties $\mathfrak{R}$ de S, avec une nouvelle opération Λ dans $\mathfrak{R}$, et on obtient un champ de parties qui correspond à Ω. On généralise ensuite le champ $\{\mathfrak{R}, p\}$ ainsi obtenu.

La rappresentazione di una σ–algebra di Boole mediante un sistema diretto, conduce – come qui vedremo – ad un nuovo tipo di campo, per cui la struttura algebrica del campo non è indipendente dalla probabilità, ma tale invece ch'esse si condizionano reciprocamente.

UN MODELLO SPAZIALE DEL CAMPO $\{\Omega, p\}$.

Sia $\{\Omega, p\}$ un campo di probabilità costituita da una σ–algebra di Boole Ω e dalla probabilità $p(\omega)$, σ–additiva e definita per ogni $\omega \in \Omega$; denotiamo con E l'evento totale e con Φ l'evento vuoto di Ω.

Sia S lo spazio costituito dalle coppie $(\omega, \overline{\omega})$ di eventi di Ω, con intersezione non vuota: $\omega \cap \overline{\omega} \neq \Phi$.

Le parti $\mathcal{S}_\omega$ di S definite dall'eguaglianza

$$\mathcal{S}_\omega = \{(\alpha, \overline{\omega}) \mid \alpha \in \omega, \alpha \cap \overline{\omega} \neq \Phi\}_{\alpha, \omega, \overline{\omega} \in \Omega} \tag{1}$$

formano un *sistema ordinato* dalla relazione fondamentale

$$\mathcal{S}_{\omega_1} \cap \mathcal{S}_{\omega_2} = \mathcal{S}_{\omega_1 \cap \omega_2}, \tag{2}$$

dove l'operazione $\cap$ del primo membro è l'intersezione fra le parti dello spazio S e la $\cap$ del secondo membro è l'operazione consimile spettante ad Ω.

Abbiamo, evidentemente, $\mathcal{S}_E = S$, $\mathcal{S}_\Phi = \Phi$ (l'insieme vuoto di S).

Indichiamo con un apice l'operazione di complementarità, sia per le parti S che per le parti di Ω, e poniamo $Q_\omega = P'_\omega$ talché la (2) diventa, ponendovi in luogo delle ω_1 e ω_2 le loro complementari,

$$Q'_{\omega'_1} \cap Q'_{\omega'_2} = Q'_{\omega'_1 \cap \omega'_2};$$

da questa relazione, applicando la formola di Morgan, si ricava:

$$Q_{\omega'_1} \cup Q_{\omega'_2} = Q_{(\omega_1 \cup \omega_2)'}, \tag{3}$$

Prendendo in particolare $R_\omega = Q_{\omega'} = \mathcal{S}'_{\omega'}$, la (3) diventa:

$$\mathfrak{R}_{\omega_1} \cup \mathfrak{R}_{\omega_2} = \mathfrak{R}_{\omega_1 \cup \omega_2}. \tag{4}$$

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

Il sistema $\mathcal{R}$, costituito dalle parti $\mathcal{R}_\omega$ dello spazio S, risulta così un sistema diretto mediante la relazione di additività (4).

Poiché la (2) è anche valida per una infinità numerabile di eventi ω_j $(j \in \mathrm{N})$ di Ω, cioè si ha

$$\bigcap_{j \in \mathrm{N}} \mathcal{S}_{\omega_j} = \mathcal{S}_{\bigcap_{j \in \mathrm{N}} \omega_j}, \tag{5}$$

ne risulta, con passaggi analoghi a quelli adoperati sopra, la σ–additività del sistema $\mathcal{R}$:

$$\bigcup_{j \in \mathrm{N}} \mathcal{R}_{\omega_j} = \mathcal{R}_{\bigcup_{j \in \mathrm{N}} \omega_j}. \tag{6}$$

Si verificano subito le $\mathcal{R}_\mathrm{E} = \mathrm{S}$, $\mathcal{R}_\Phi = \Phi$ e la relazione d'ordine

$$\mathcal{R}_\omega \subset \mathcal{R}_{\overline{\omega}}$$

corrispondente ad $\omega \subset \overline{\omega}$.

Per dotare il sistema $\mathcal{R}$ di una probabilità, assumiamo

$$\mathrm{P}(\mathrm{R}_\omega) = p(\omega) \tag{7}$$

ed applichiamo P in (4). Risulta

$$\mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1} \cup \mathcal{R}_{\omega_2}) = \mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1 \cup \omega_2}) = p(\omega 1 \cup \omega 2);$$

pertanto, tenendo conto delle proprietà di p e di P, si ricava

$$\mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1}) + \mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_2}) - \mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1} \cap \mathcal{R}_{\omega_2}) = p(\omega 1) + p(\omega 2) - p(\omega 1 \cap \omega 2),$$

da cui

$$\mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1} \cap \mathcal{R}_{\omega_2}) = p(\omega 1 \cap \omega 2) = \mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1 \cap \omega_2}). \tag{8}$$

Se dunque $\omega 1 \cap \omega 2 = \Phi$, la (8) fornisce $p(\mathcal{R}_{\omega_1} \cap \mathcal{R}_{\omega_2}) = 0$ senza che però sussista la $\mathcal{R}_{\omega_1} \cap \mathcal{R}_{\omega_2} = \Phi$ la quale ha luogo soltanto per $\omega 1 = \Phi$ o $\omega 2 = \Phi$.

La $\mathcal{R}_{\omega_1 \cap \omega_2}$ è, in $\mathcal{R}$, evidentemente inferiore tanto ad $\mathcal{R}_{\omega_1}$ come ad $\mathcal{R}_{\omega_2}$ ed in conseguenza pure ad $\mathcal{R}_{\omega_1} \cap \mathcal{R}_{\omega_2}$. Fra gli elementi di $\mathcal{R}$ inferiori ad $\mathcal{R}_{\omega_1}$ e ad $\mathcal{R}_{\omega_2}$, $\mathcal{R}_{\omega_1 \cap \omega_2}$ è, evidentemente, l'elemento massimale. Infatti, da $\mathcal{R}_\omega \subset \mathcal{R}_{\omega_1}$ e $\mathcal{R}_\omega \subset \mathcal{R}_{\omega_2}$ risulta $\omega \subset \omega 1$, $\omega \subset \omega 2$, eppertanto $\omega \subset \omega 1 \cap \omega 2$, da cui $\mathcal{R}_\omega \subset \mathcal{R}_{\omega_1 \cup \omega_2}$.

Definiamo ora l'operazione $\wedge$ simmetrica e associativa in $\mathcal{R}$, tramite l'eguaglianza

$$\mathcal{R}_{\omega_1} \wedge \mathcal{R}_{\omega_2} = \mathcal{R}_{\omega_1 \cap \omega_2}. \tag{9}$$

Si dimostra, per semplice verifica, che le operazioni $\cup$ e $\wedge$ definite in $\mathcal{R}$ sono distributive, « in probabilità », ciascuna rispetto all'altra, cioè:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1} \cup (\mathcal{R}_{\omega_2} \wedge \mathcal{R}_{\omega_3})) = \mathrm{P}((\mathcal{R}_{\omega_1} \cup \mathcal{R}_{\omega_2}) \wedge (\mathcal{R}_{\omega_1} \cup \mathcal{R}_{\omega_3})), \\ &\mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1} \wedge (\mathcal{R}_{\omega_2} \cup \mathcal{R}_{\omega_3})) = \mathrm{P}((\mathcal{R}_{\omega_1} \wedge \mathcal{R}_{\omega_2}) \cup (\mathcal{R}_{\omega_1} \wedge \mathcal{R}_{\omega_3})). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Osserviamo, infine, che la condizione di additività per P, espressa dalla

$$\mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1} \cup \mathcal{R}_{\omega_2}) = \mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_1}) + \mathrm{P}(\mathcal{R}_{\omega_2}), \tag{11}$$

viene ad assumere la forma prettamente probabilistica

(12) $$P(\mathfrak{R}_{\omega_1} \wedge \mathfrak{R}_{\omega_2}) = 0.$$

Il sistema $\mathfrak{R}$ munito, oltre all'operazione originaria $\cup$, con l'operazione $\wedge$ e con la probabilità P, è un sistema di parti dello spazio S, e rappresenta il campo $\{\Omega, p\}$ con tutte le sue proprietà.

I CAMPI $\{\Theta, P\}$.

Se prendiamo $\{\mathfrak{R}, P\}$ come modello in sè, indipendente cioè dallo spazio S, possiamo costruire un campo generale che ne abbia tutte le caratteristiche.

Sia Θ un sistema diretto di elementi θ_u, $\subset$ il simbolo dell'ordine in Θ, $\theta_{u'} \cup \theta_{u''}$, l'operazione universale in Θ con le ordinarie proprietà di commutatività e di associatività ed anche con la proprietà di minimo:

($\cup$) $$\theta_{u_1} \cup \theta_{u_2} = \inf\{\theta_u \mid \theta_u \supset \theta_{u_1}, \theta_u \supset \theta_{u_2}\}.$$

Supponiamo, in più, che Θ contenga il superiore S e l'inferiore o dell'insieme di tutti i suoi elementi.

Risulta utile introdurre una seconda operazione $\wedge$, simmetrica ed associativa, e una misura P, definita per ogni elemento di Θ, con le rispettive proprietà:

($\wedge$) $$\begin{cases} \theta_{u_1} \wedge \theta_{u_2} = 0 \quad \text{solo se} \quad \theta_{u_1} = 0 \quad \text{oppure} \quad \theta_{u_2} = 0, \\ \theta_{u_1} \wedge \theta_{u_2} = \sup\{\theta_u \mid \theta_u \subset \theta_{u_1}, \theta_u \subset \theta_{u_2}\}, \end{cases}$$

e

(P) $$\begin{cases} P(\theta_u) \geq 0 \quad , \quad P(S) = 1 \quad , \quad P(0) = 0, \\ P(\theta_u) \geq P(\theta_v) \quad \text{se} \quad \theta_u \supset \theta_v, \end{cases}$$

in guisa che valgano la proprietà di compatibilità rappresentata dall'uguaglianza

(13) $$P(\theta_{u_1} \cup \theta_{u_2}) = P(\theta_{u_1}) + P(\theta_{u_2}) - p(\theta_{u_1} \wedge \theta_{u_2})$$

e le relazioni di distributività in probabilità:

(14) $$\begin{cases} P(\theta_{u_1} \cup (\theta_{u_2} \wedge \theta_{u_3})) = P((\theta_{u_1} \cup \theta_{u_2}) \wedge (\theta_{u_1} \cup \theta_{u_3})), \\ P(\theta_{u_1} \wedge (\theta_{u_2} \cup \theta_{u_3})) = P((\theta_{u_1} \wedge \theta_{u_2}) \cup (\theta_{u_1} \wedge \theta_{u_3})). \end{cases}$$

Supponiamo in più, per definire il σ-campo $\{\Theta, P\}$, che

$$\bigcup_{j \in N} \theta_{u_j} \subset \Theta \quad \text{se} \quad \theta_{u_j} \in \Theta \quad , \quad j \in N,$$

e che

$$P\left(\bigcup_{j \in N} \theta_{u_j}\right) = \sum_{j \in N} P(\theta_{u_j})$$

se $P(\theta_{u_j} \wedge \theta_{u_k}) = 0$, $j \neq k$, $j, k \in N$.

Poiché tutte le proprietà sopra definite trovansi verificate in $\{\mathfrak{R}, P\}$, ne discende la loro compatibilità oltre all'opportunità della loro introduzione.