Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marius Iosifescu

Un thèorème d'existence pour les chaines d'ordre infini

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 211–214.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_211_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Calcolo delle probabilità. — *Un théorème d'existence pour les chaînes d'ordre infini.* Nota di MARIUS IOSIFESCU, presentata (*) dal Corrisp. G. FICHERA.

RIASSUNTO. — In questa Nota si dà un teorema d'esistenza per le catene d'ordine infinito. Questo teorema estende il teorema d'esistenza dato in [3].

1. Soient X un espace métrique séparable et $\mathfrak{F}$ la σ–algèbre des parties boreliennes de X.

Posons

$$\mathrm{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$$

$$-\mathrm{N} = \{\cdots, -1, 0\}$$

$$\mathrm{Z} = -\mathrm{N} \cup \mathrm{N}^*$$

$$\mathrm{W} = \mathrm{X}^{-\mathrm{N}}$$

et soit $\mathfrak{W} = \mathfrak{F}^{-\mathrm{N}}$ la σ–algèbre produit correspondant à W.

Soit $(\mathrm{X}^{(n)}, \mathfrak{F}^{(n)})$ pour $n \in \mathrm{N}^*$ l'espace mesurable produit de n espaces $(\mathrm{X}, \mathfrak{F})$.

Soit $({}^n\mathrm{P})_{n \in \mathrm{Z}}$ une famille de fonctions réelles définies sur $\mathrm{W} \times \mathfrak{F}$ telles que, pour chaque $n \in \mathrm{N}^*$, ${}^n\mathrm{P}(c\,;\,.)$ soit une probabilité sur $\mathfrak{F}$ pour tout $c \in \mathrm{W}$ et ${}^n\mathrm{P}(.\,;\mathrm{A})$ soit une fonction $\mathfrak{W}$–mesurable pour tout $\mathrm{A} \in \mathfrak{F}$.

Pour tout $x \in \mathrm{X}$ on considère (voir [5], [1], [3]) l'application $u(.\,;x)$ de W dans soi–même définie par la relation

$$u(c\,;x) = (\cdots, x'_{-n}, \cdots, x'_{-1}, x'_0)$$

avec

$$x'_{-i} = x_{-i+1} \quad , \quad i \in \mathrm{N}^* \quad , \quad x'_0 = x$$

pour

$$c = (\cdots, x_{-n}, \cdots, x_{-1}, x_0)\,.$$

On posera

$$u(.\,;x^{(n)}) = u(.\,;x_n) \circ \cdots \circ u(.\,;x_1)$$

pour $x^{(n)} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{X}^{(n)}$.

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

Pour $m \in Z$, $l \in N^*$ soit ${}^m P_l^1$ la fonction définie sur $W \times \mathfrak{F}^{(l)}$ par les relations

$$ {}^m P_l^1 = {}^m P \qquad \text{si} \quad l = 1 $$

$$ {}^m P_l^1 (c ; A^{(l)}) = \int_X {}^m P(c ; dx_1) \int_X \cdots \int_X {}^{m+l-1} P\,(u(c ; x^{(l-1)}) ; dx_l)\, \chi_{A^{(l)}}(x^{(l)}) \qquad \text{si} \quad l \geq 2 $$

où $\chi_{A^{(l)}}$ est l'indicateur de l'ensemble $A^{(l)} \in \mathfrak{F}^{(l)}$.

Pour $m \in Z$, $l, n \in N^*$ soit aussi ${}^m P_l^n$ la fonction définie sur $W \times \mathfrak{F}^{(l)}$ par les relations

$$ {}^m P_l^n = {}^m P_l^1 \qquad \text{si} \quad n = 1 $$

$$ {}^m P_l^n (c ; A^{(l)}) = \int_X {}^m P(c ; dx)\, {}^{m+1} P_l^{n-1} (u(c ; x) ; A^{(l)}) \qquad \text{si} \quad n \geq 2 . $$

On voit sans peine que

$$ {}^m P_l^n (c : A^{(l)}) = {}^m P_l^1 (c ; X^{(n-1)} \times A^{(l)}) $$

en convenant que $X^{(0)} \times A^{(l)} = A^{(l)}$.

Posons

$$ Y = \bigcup_{r \in N^*} X^{(r)} $$

et soit $Y_n(A)$ l'ensemble des éléments de Y qui contiennent, parmi leurs composantes, au moins n appartenant à $A \in \mathfrak{F}$.

Nous considérerons ([4]) la conditions FLS (A_0, ν) suivante avec $A_0 \in \mathfrak{F}$, $\nu \in N^*$:

(i) il existe $\gamma > 0$ tel que

$$ {}^m P_1^\nu (c ; A_0) > \gamma $$

pour chaque $c \in W$ et $m \in Z$;

(ii) en posant

$$ a_n = \sup | {}^{m'} P(u(c' ; x^{(r)}) ; A) - {}^{m''} P(u(c'' ; x^{(r)}) ; A) | $$

la borne supérieure étant prise pour $m', m'' \in Z$, $c', c'' \in W$, $x^{(r)} \in Y_n(A_0)$, $A \in \mathfrak{F}$ on a

$$ \sum_{n \in N^*} a_n < \infty . $$

Proposition (voir [4]). – *Si la condition* FLS (A_0, ν) *est vérifiée, alors*

$$ | {}^{m'} P_l^1 (u(c' ; x^{(r)}) ; A^{(l)}) - {}^{m''} P_l^1 (u(c'' ; x^{(r)}) ; A^{(l)}) | \leq \frac{2\nu}{\gamma} \sum_{j=n}^{n+l-1} a_j $$

pour chaque $m', m'' \in Z$, $l \in N^*$, $c', c'' \in W$, $x^{(r)} \in Y_n(A_0)$, $A^{(l)} \in \mathfrak{F}^{(l)}$.

2. Dans ce qui suit nous supposerons que pour chaque $l \in \mathrm{N}^*$ il existe une probabilité P_l^∞ sur $\mathfrak{F}^{(l)}$ de sorte que

$$\lim_{n \to \infty} {}^m\mathrm{P}_l^n(c\,;\mathrm{A}^{(l)}) = \mathrm{P}_l^\infty(\mathrm{A}^{(l)}) \tag{1}$$

uniformément par rapport à $m \in \mathrm{Z}^*$, $l \in \mathrm{N}^*$, $c \in \mathrm{W}$, $\mathrm{A}^{(l)} \in \mathfrak{F}^{(l)}$.

Si la condition FLS $(\mathrm{A}_0\,,\nu)$ est vérifiée, alors pour avoir (1) il suffit qu'il existe $n_0 \in \mathrm{N}^*$ et $\delta > 0$ tels que

$$|{}^{m'}\mathrm{P}_l^{n_0}(c'\,;\mathrm{A}^{(l)}) - {}^{m''}\mathrm{P}_l^{n_0}(c''\,;\mathrm{A}^{(l)})| < 1 - \delta \tag{2}$$

pour chaque $m', m'' \in \mathrm{Z}$, $l \in \mathrm{N}^*$, $c', c'' \in \mathrm{W}$, $\mathrm{A}^{(l)} \in \mathfrak{F}^{(l)}$ (voir [4]). A son tour en supposant que l'on ait (ii) la relation (2) est entraînée par l'existence d'une probabilité p_0 sur $\mathrm{A}_0 \cap \mathfrak{F} = \{\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A} \mid \mathrm{A} \in \mathfrak{F}\}$ et d'un nombre $\alpha > 0$ tels que

$${}^m\mathrm{P}\,(c\,;\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A}) \geq \alpha p_0\,(\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A})$$

pour chaque $c \in \mathrm{W}$, $\mathrm{A} \in \mathfrak{F}$, $m \in \mathrm{N}^*$ et l'on a

$$n_0 = 1 \quad , \quad \delta = \frac{1}{4}\alpha^r$$

$r \in \mathrm{N}^*$ étant déterminé de sorte que $\sum_{j \geq r} a_j < \frac{\alpha}{8}$.

THÉORÈME. – *Il existe un processus stationnaire unique* $(\mathrm{X}^\mathrm{Z}, \mathfrak{F}^\mathrm{Z}, \mathrm{P})$ *tel que* (1)

$$\mathrm{P}\,(\overset{-1}{pr}_{[m+1,m+l]}(\mathrm{A}^{(l)})) = \mathrm{P}_l^\infty(\mathrm{A}^{(l)})$$

et presque sûrement

$$\mathrm{P}\,(\overset{-1}{pr}_{[m+1,m+l]}(\mathrm{A}^{(l)}) \mid pr_{[-\infty,m]}(x^\mathrm{Z}) = c) = {}^m\mathrm{P}_l^1(c\,;\mathrm{A}^{(l)})$$

pour chaque $m \in \mathrm{Z}$, $l \in \mathrm{N}^*$, $\mathrm{A}^{(l)} \in \mathfrak{F}^{(l)}$.

La démonstration de ce théorème qui étend le théorème d'existence de [3] (2) suit la voie de [3] en s'appuyant sur la proposition ci-dessus.

Nous remarquons pour conclure que en vertu de (1) le processus $(\mathrm{X}^\mathrm{Z}, \mathfrak{F}^\mathrm{Z}, \mathrm{P})$ appartient à une classe de processus considéré en [2] et en particulier il est « strongly mixing ».

(1) Pour $\{m, m+1, \cdots, n\} \subset \mathrm{Z}$ l'application $pr_{[m,n]}$ est définie par la relation

$$pr_{[m,n]}(x^\mathrm{Z}) = (x_i)_{m \leq i \leq n}.$$

(2) Dans [3] on a considéré le cas homogène: ${}^m\mathrm{P}$ ne dépend pas de $m \in \mathrm{Z}$. De plus il y avait $\mathrm{A}_0 = \mathrm{X}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] W. DOEBLIN et R. FORTET, *Sur les chaînes à liaisons complètes*, « Bull. Soc. Math. Fr. », *65*, 132–148 (1939).

[2] I. A. IBRAGUIMOFF, *Quelques théorèmes limites pour les processus stationnaires*, « Teor. Veroïatn. i Prim », *7*, 361–392 (1962) (en russe).

[3] C. T. IONESCU TULCEA, *On a class of operators occurring in the theory of chains of infinite order*, « Canad. J. Math. », *11*, 112–121 (1959).

[4] M. IOSIFESCU, *On the uniform ergodicity of a class of non-homogeneous random systems with complete connections*, « Revue Roumaine Math. pures et appl. Acad. R.S.R. », 1966, 11 (à paraître).

[5] O. ONICESCU et G. MIHOC, *Sur les chaînes de variables statistiques*, « Bull. Sci. Math. », *59*, 174–192 (1935).