Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pedre Graciunaș, Anatole Grecu, Emil Tokaci

Su alcuni risultati concernenti le definizioni attuali delle distribuzioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 207–210.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_207_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Analisi funzionale. — *Su alcuni risultati concernenti le definizioni attuali delle distribuzioni.* Nota di PETRE GRACIUNAȘ, ANATOLE GRECU ed EMIL TOKACI (*), presentata(**) dal Socio M. PICONE.

A Mauro Picone nel suo 80° compleanno.

SUMMARY. — Following step by step the actual definitions of the generalized functions (L. Schwartz [2], J. Mikusinski [4] and J. Korevaar [5]) the authors establish a number of correlations between these, as well as an equivalence theorem in the sense of Korevaar [5] concerned with two of the analysed definitions (2.1 and 2.2).

1. In ciò che segue gli Autori ispirandosi ad uno dei primi libri di Analisi funzionale, dovuto a Mauro Picone [1], stabiliscono un numero di correlazioni relative alle definizioni attuali delle distribuzioni come pure un teorema di equivalenza.

2. Prendiamo le mosse nell'ambito delle definizioni attuali delle distribuzioni da quella dovuta a L. Schwartz [2].

Definizione 2.1. – Una distribuzione $T : \mathcal{C}(a, b) \rightarrow \mathcal{C}$ è un funzionale lineare continuo, definito sullo spazio $\mathcal{C}(a, b)$ coi valori in un corpo di scalari (reali o complessi), ove lo spazio delle funzioni di base $\mathcal{C}(a, b)$ è lo spazio delle funzioni continue, definite su (a, b) indefinitamente derivabili, ove si intende per $\varphi_n^{(k)}$ in (a, b), $\varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$ in (a, b) per $k \geq 0$ ed intero.

Sia $\mathcal{C}'(a, b)$ lo spazio di queste distribuzioni. $\mathcal{C}'(a, b)$ risulta essere uno spazio lineare topologico e completo, poiché duale dello spazio delle funzioni di base completamente numerabile normato.

Se (a, b) è finito, ogni distribuzione risulta essere derivata di una funzione continua. Diremo *ordine* di una distribuzione $t(x)$ il più piccolo numero k_0 tale che esista una funzione continua $F(x)$ in modo che si abbia $t(x) = F^{(k_0)}(x)$.

Definizione 2.2 (punto di vista del Mikusinski [4]–Korevaar [5]). Diremo che una serie di funzioni continue $\{f_n(x)\}$ definite su (a, b) è *fondamentale* se hanno luogo le seguenti condizioni:

1° $\exists k \geq 0$ intero ed una serie di funzioni $\{F_n(x)\}$ continue ed almeno k volte derivabili in modo che sia $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$ e

2° $F_n(x) \rightrightarrows$ ove col simbolo $\rightrightarrows$ si è notata convergenza quasi uniforme della serie $F_n(x)$ su (a, b), è cioè convergenza uniforme su ogni compatto dell'(a, b).

(*) Agli Autori è ben gradito di esprimere al prof. Demetrio Mangeron i voti di profonda gratitudine per i consigli concessigli durante la preparazione del presente lavoro.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

Definizione 2.3. – Due serie fondamentali $\{f_n(x)\}$ e $\{g_n(x)\}$ sono *equivalenti* se:

1^{oo} $\exists\, k \geq 0$ intero, $\{F_n(x)\}$, $\{G_n(x)\}$ tale che $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$, $G_n^{(k)}(x) = g_n(x)$ e

2^{oo} $F_n(x) \underset{\rightarrow\leftarrow}{\rightarrow\leftarrow} G_n(x)$ ove col simbolo $\underset{\rightarrow\leftarrow}{\rightarrow\leftarrow}$ si è notata convergenza quasi uniforme delle serie $\{F_n(x)\}$, $\{G_n(x)\}$ verso una medesima funzione.

Da ciò che si è stato detto sin'ora si deduce la seguente

Definizione 2.4. – Una distribuzione $[f_n(x)]$ è la classe di tutte le serie fondamentali equivalenti con $\{f_n(x)\}$.

È ovvio che ogni distribuzione può essere data da una serie di funzioni derivabili.

Diremo ordine di una distribuzione $\{f_n(x)\}$ il numero $k_0 = \min\{k_i\}$ per cui esistono le serie $\{F_{n_i}(x)\}$ tali che $F_{n_i}^{(k_i)}(x) = f_n(x)$ e $\{F_{n_i}(x)\} \underset{\rightarrow}{\rightarrow}$.

3. La notazione $f(x) = {}^*\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, ove $f_n(x)$ è fondamentale, utilizzata dal Korevaar per le distribuzioni [4], ci suggerisce l'idea di considerare le distribuzioni come limiti ideali delle serie fondamentali di funzioni.

Siano $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ due serie fondamentali, e cioè $\exists\, k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ in modo che sia $f_n^{(-k_1)}(x) \underset{\rightarrow}{\rightarrow}$ e $g_n^{(-k_2)}(x) \underset{\rightarrow}{\rightarrow}$ su (a, b), ove è lecito anche prendere $k_1 = k_2 = k$.

Prenderemo per *distanza* tra due serie fondamentali la seguente

Definizione 3.1.

$$\rho(f_n, g_n) = \sup_{\|\varphi\| < 1} |(f_n - g_n, \varphi)| = \sup_{\|\varphi\| < 1} \left| (-1)^k \int_a^b (f_n^{(-k)}(x) - g_n^{(-k)}(x)\, \varphi^{(k)}(x)\, \mathrm{d}x \right|,$$

ove $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(q, b)$ è indefinitamente derivabile ed avente per supporto un compatto in (a, b).

È ovvio che vi hanno luogo le proprietà:

$$\rho(f_n, g_n) \geq 0 \quad , \quad \rho(f_n, g_n) = \rho(g_n, f_n),$$

$$\rho(f_n, f_n) \leq \rho(f_n, g_n) + \rho(g_n, h_n).$$

Due serie sono equivalenti se $\rho(f_n, g_n)_{n\to\infty} \to 0$ e pertanto questa risulta una *relazione di equivalenza*. Tale relazione di equivalenza definisce una *suddivisione in classi di equivalenza. Ogni classe essendovi considerata una distribuzione.*

Osservazione 1. – In seguito del fatto dell'esistenza della distanza e poiché $\exists \lim_{n\to\infty} \rho(f_n, g_n)$, si può prendere $\rho(f, g) = \lim_{n\to\infty} \rho(f_n, g_n)$ ove $f = {}^*\lim_{n\to\infty} [f_n(x)]$, $g = {}^*\lim_{n\to\infty} [g_n(x)]$. Donde risulta la possibilità di definire una topologia nell'insieme delle distribuzioni utilizzando la metrica.

4. Nel quadro del problema concernente la correlazione tra le definizioni delle distribuzioni non presenta alcun interesse l'equivalenza tra i punti

di vista spettanti alle definizioni 2.2 e 3.1. È interessante però approfondire l'equivalenza delle definizioni 2.1 e 2.2.

Definizione 4.1. – Se $f = [f_n(x)] \in \mathfrak{M}(a, b)$ e $t \in \mathcal{C}'(a, b)$, essendovi $\mathfrak{M}(a, b)$ lo spettro delle distribuzioni definite in seguito alla 2.2, si ha $f(x) \longleftrightarrow t(x)$ se

1000 hanno il medesimo ordine;

2000 se k è il loro ordine, $F_n(x)$, $F(x)$ hanno la proprietà $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$, $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$, allora $F^{(k)}(x) = t(x)$.

Si verifica senz'altro che questa definizione è un isomorfismo algebrico e che l'operazione di derivazione è conservata.

Introducendo il prodotto interno di una distribuzione per una funzione indefinitamente derivabile col supporto compatto tramite

$$(f, \varphi) = \lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

essendovi

$$f = {}^*\lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \text{e} \quad (t, \varphi) = (-1)^k (T, \varphi^{(k)}(x)),$$

ove $T(x)$ è una funzione continua soddisfacente $T^{(k)}(x) = t(x)$, si perviene al seguente teorema relativo alla definizione data dal Korevaar dell'equivalenza delle due specie di distribuzioni or ora mentovate:

TEOREMA. – *Se*

$$f(x) = {}^*\lim_{n \to \infty} [f_n(x)] \in \mathfrak{M}(a, b) \quad e \quad t(x) \in \mathcal{C}'(a, b),$$

$f(x) \longleftrightarrow t(x)$ *allora ed allora soltanto se* a) *hanno il medesimo ordine*; b) $(t, \varphi) = (f, \varphi)$ *quale che sia la funzione indefinitamente derivabile* $\varphi(x)$ *col supporto compatto.*

Esempio di equivalenza. – Se $\delta(x) = [f_n(x)]$, ove $f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-(nx^2/2)}$ essendovi $\delta(x)$ definita tramite $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, risulta senz'altro facendone appello alla definizione 2.1 l'equivalenza delle due distribuzioni considerate se si prende $k = 2$. Si dimostra pure immediatamente che [6], [7]

$$f_n^{(-2)}(x) \rightrightarrows G(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \delta(x) = G^{(2)}(x).$$

Osservazione 2. – Il vasto campo di applicazioni additate dal mondo scientifico e tecnico al Calcolo operazionale, accresciuto assai negli ultimi tre decenni grazie all'introduzione nell'ambito dell'Analisi funzionale di un nuovo e potente *metodo della trasformata di Laplace–Picone ad intervallo d'integrazione finito*, ideato dall'Illustre Accademico Linceo [7] ed allargato poscia dalla Sua pregevole Scuola, della quale ad esempio, i matematici francesi P. Delerue e L. Poli – parlando nel loro libro *Le Calcul symbolique a deux variables et applications* [8] di lavori in questo dominio dovuti ad Amerio [9], Ghizzetti [10], Mangeron [11] – dicono «On leur doit deux progrès principaux» [9], p. 49), ha condotto all'assiomatizzazione odierna del Calcolo operazionale [13]. È sommamente interessante di far presentare i risultati simili nell'ambito delle distribuzioni [13], [14].

3. È pure interessante, tenendo conto del fatto che alcune distribuzioni si presentano come originali generalizzati (basta pensare a $\delta(t)$), dare una risposta adeguata concernente la *misura in cui ogni distribuzione può essere considerata come un originale generalizzato* [15], [16].

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. PICONE, *Fondamenti di Analisi funzionale lineare*. Ed. R. Ist. Naz. di Alta Matematica. Roma, Città Universitarià.

[2] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I, II. Hermann, Paris 1950, 1951.

[3] J. MIKUSINSKI, *Teoria obobscennyh funktii* (*Teoria delle funzioni generalizzate*). Ed. I. L. Mosca 1955.

[4] J. KOREVAAR, *Distributions defined by fundamental sequences*. – II. *Derivatives and antiderivatives. Laplace transformation*, «Indagationes math.», *17* (3), 379–389 (1955).

[5] I. GUELFAND e M. ŠILOV, *Prostranstva osnovnyh i obobscennyh functii* (*Spàzi di funzioni di base e generalizzate*). Fizmatgiz, Mosca 1958.

[6] G. TEMPLE, *The theory of generalized Functions*, «Proc. Roy. Soc., London», *228* (1173), 179–193 (1955).

[7] M. PICONE, *Appunti d'analisi superiore*, Rondinella, Napoli 1940, p. 718.

[8] L. POLI e P. DELERUE, *Le Calcul symbolique à deux variables et ses applications*. Gauthier-Villars, Éditeurs, Paris 1954, pp. 49–50.

[9] L. AMERIO, *Sull'integrazione di vari sistemi differenziali a derivate parziali*, «Rend. Ist. Lombardo, Sci. Lett. Arti», Torino 1944.

[10] A. GHIZZETTI, *Problème de Dirichlet et Calcul Symbolique*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova» (1948).

[11] D. MANGERON, *Sulla trasformata multipla di Laplace–Picone ad intervallo d'integrazione finito ed applicazioni allo studio di vari sistemi a derivate parziali*, «Rend. Accad. dei Lincei», ser. 7ª, *1* (1), 1–9 (1939).

[12] KÔSAKU YOSIDA, *Functional Analysis*. Springer–Verlag. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1965, pp. 62 sgg.

[13] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace Transformation*. Birkhäuser, Basel 1950.

[14] IA. V. BYKOV, *Aksiomatičeskoe postroenie operatornyh iscislenii* (*Costruzione assiomatica dei calcoli operazionali*). Materialy XIII–i naucinoi conferentzii prof. prepod. sostava fiz. – mat. fak. Kirg. Gos. Univ., Frunze 1965.

[15] V. M. AMERBAEV, *Kteorii operatzionnogo iscislenia* (*Sulla teoria del Calcolo operazionale*). Nel volume: *Issledovania po differentzialnym uravneniam i ih primeneniu*, Akad. Nauk Kaz. SSR, Alma–Ata 1965, pp. 142–155.

[16] D. MANGERON e A. F. ŠESTOPAL, *Sur le problème du calcul opérationnel fondé sur la transformation de Laplace–Picone à l'intérvalle d'integration fini*, «Bul. Inst. politehn. Iași», s.n., IX/XIII (1–2), 5–12 (1963).