Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, Philippe Noël

Su alcuni problemi concernenti il metodo di collocazione. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 201–206.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_201_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Calcolo numerico. — *Su alcuni problemi concernenti il metodo di collocazione.* Nota I di DEMETRIO MANGERON e PHILIPPE NOËL, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — One presents some results concerning studies of various integro-differential and partial differential equations problems using the collocation method, so called by L. Collatz [14].

1. Il rapidissimo sviluppo dei mezzi odierni di attrezzatura dei centri studi calcolatrici elettroniche coadiuvato dall'imponente progresso del Calcolo numerico, rigogliosamente accresciuto sulla solidissima base dell'Analisi funzionale [1], [2] e promosso nel mondo scientifico internazionale dall'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone grazie alla pubblicazione delle numerosissime relazioni sul tema «Ciò che ha dato e ciò che può dare l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo del C.N.R.» [3], [4], da Lui creato [5], reclama una rapida sistemazione dei vari metodi spettanti al Calcolo numerico (1), tanto per ciò che riguarda la cristallizzazione dei procedimenti algoritmici, quanto per lo studio della loro convergenza.

In questi ultimi anni il primo degli Autori ha estesamente studiato dal punto di vista del Calcolo numerico, prendendo le mosse dai problemi al contorno per certi *operatori differenziali non ellittici*, formulati e risolti da lui per primo – come è sottolineato, ad esempio da Yu. M. Berezanski nel suo recente libro dedicato allo sviluppo in serie di autofunzioni concernenti gli operatori autoaggiunti ([6], pp. 760, 781) –, vari sistemi differenziali d'ordine superiore, lineari o no, ordinari o a derivate parziali, con termini di rimanenza (ereditari) e ad argomenti ritardati [7]–[10], mentre il secondo ha elaborato, nel quadro della problematica coltivata nel Centro Studi Calcolatrici Elettroniche di Nancy, diretto dal prof. J. Legras [11], alcuni lavori concernenti l'interpolazione in una o due variabili per polinomi ed ha tradotto i risultati ottenuti, per l'esecuzione effettiva dei calcoli spettanti a certi problemi concreti, nel linguaggio matematico ALGOL [12], [13].

Nella presente Nota si espongono alcuni risultati concernenti l'applicazione del metodo di collocazione (denominazione dovuta a L. Collatz [14]) ai vari problemi integro-differenziali o a derivate parziali, mentre che varie

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

(1) Una vera e propria spinta per ulteriori fecondi sviluppi del Calcolo numerico costituisce la pubblicazione di una nuova rivista «Calcolo» a cura dell'A.I.C.A. e del C.N.R., diretta da S. Faedo e A. Ghizzetti.

valutazioni concernenti la convergenza di esso metodo, come pure alcuni studi comparativi con altri metodi di Calcolo numerico, saranno esposti nel « Bollettino dell'Istituto politecnico di Iaşi ».

2. Prendiamo le mosse dai risultati conseguiti dal primo degli Autori in collaborazione con L. E. Krivošein [15]–[16] nell'ambito dell'elaborazione dei metodi di Matematica costruttiva e di Calcolo numerico spettanti ai problemi di unicità, di esistenza, di stabilità e di valutazione degli errori commessi nel calcolo delle soluzioni concernenti vari sistemi integro–differenziali.

L'applicazione del metodo di collocazione per il sistema integro–differenziale di Fredholm con le condizioni al contorno

$$\mathrm{L}[y] = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_0^m \mathcal{K}_i(x, t)\, y^{(i)}(t)\, \mathrm{d}t; \tag{1}$$

$$\mathrm{R}_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} [a_{ij}\, y^{(i)}(c) + b_{ij}\, y^{(i)}(d)] = \gamma_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n), \tag{2}$$

ove $a_{ij}, b_{ij}, \gamma_j\ (i+1, j = 1, 2, \cdots, n)$ sono numeri noti, $\mathrm{L}[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_1^n a_i(x)\, y^{(n-1)}(x)$, le funzioni note che figurano nell'equazione (1) sono frammentariamente continue per $n \geq m$ e $p = m - n$ volte differenziabili rispetto ad x nell'intervallo $[a, b]$ per $m > n$; λ è un parametro e $[c, d] \subset [a, b]$, consta nella risoluzione del seguente sistema lineare di equazioni algebriche

$$\gamma(x_i, \lambda, a_1, a_2, \cdots, a_k) \equiv \sum_{j=1}^{k} \rho_{ij}(\lambda)\, a_j + h_i(\lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{3}$$

$$\gamma(x, \lambda, a_1, a_2, \cdots, a_k) \equiv \mathrm{L}[y_k] - f(x) - \lambda \int_a^b \sum_0^m \mathcal{K}_i(x, t)\, y_k^{(i)}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{4}$$

essendovi la soluzione approssimata del problema considerato messa sotto la forma

$$y_k(x) = \varphi_0(x) + \sum_1^k a_s\, \varphi_s(x), \tag{5}$$

ove $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x)$ sono funzioni note linearmente indipendenti che godono, ad esempio, della proprietà di completezza relativa oppure appartengono allo spazio funzionale $\mathcal{C}^n[a, b]$, mentre soddisfano alle condizioni al contorno

$$\mathrm{R}_j[\varphi_0] = \gamma_j \quad , \quad \mathrm{R}_j[\varphi_s] = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n;\ s = 1, 2, \cdots, k). \tag{6}$$

L'arbitrarietà di scelta dei punti $x_i \in [a, b]$ che supporremo non essere punti di discontinuità delle funzioni $a_i(x), f(x), \mathcal{K}_j(x, t)\ (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 0, 1, \cdots, m)$ permette inoltre la presa in esame di considerazioni supplementari concernenti l'ottimizzazione ed altre ancora.

In modo affatto simile si studiano i problemi concernenti l'applicazione del metodo di collocazione spettante al sistema integro–differenziale di Volterra

$$L[y] = f(x) + \lambda \int_a^x \sum_0^m \mathcal{K}_i(x, t)\, y^{(i)}(t)\, dt, \tag{7}$$

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_1^n a_i(x)\, y^{(n-i)}(x), \qquad x \in [a, d], \tag{8}$$

con le condizioni al contorno (2), ovvero ai sistemi di Fredholm (1) e di Volterra (7), (8) e le condizioni di Cauchy

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1), x_0 \in [a, b], \tag{9}$$

ed altri ancora.

3. Passando poi allo studio della convergenza del metodo di collocazione per vari sistemi integro–differenziali ordinari, ove si tiene conto anche dei risultati stabiliti sulla base delle ricerche degli Autori nella recente tesi di laurea dell'E. B. Karpilovska [17], si possono enunciare i seguenti teoremi.

TEOREMA 1. – *Nell'ipotesi che per i punti $x_i \in [a, b]$ spettanti al metodo di collocazione sono stati scelti i nodi di Cebišev oppure quelli di Gauss, il sistema di equazioni lineari algebriche*

$$(\mathcal{K}y_n)(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{10}$$

corrispondente alla soluzione approssimata

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{x} c_k P_k(x) = \sum_{k=1}^{m+n} d_k x^{k-1} \tag{11}$$

del problema

$$(\mathcal{K}y)(x) \equiv y^{(m)}(x) - \lambda \left[\sum_{s=1}^m p_s(x)\, y^{m-s}(x) + \int_a^b \sum_{s=0}^m q_s(x, t)\, y^{(m-s)}(t) dt \right] = f(x), \tag{12}$$

e

$$L_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{m-1} \left[\sum_{k=1}^{l} a_{ij}^k y^{(i)}(t_k) + \int_a^b b_{ij}(x)\, y^{(i)}(x)\, dx \right] = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m), \tag{13}$$

ove $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_l \le b$, i coefficienti a_{ij}^k e le funzioni $b_{ij}(x)$ sommabili in $[a, b]$ sono tali che $\lambda = 0$ non è un autovalore del problema omogeneo corrispondente, mentre la successione dei polinomi $P_k(x)$ di grado $(m + k - 1)$ soddisfa alle eguaglianze

$$L_j P_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots; j = 1, 2, \cdots, m), \tag{14}$$

è risolubile per i valori di n abbastanza grandi e le soluzioni approssimate y_n^* convergono uniformemente insieme con le loro derivate sino all'ordine m incluso verso la soluzione esatta y^* del problema (12), (13) *e le corrispondenti derivate in modo che sia*

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| y^{*(k)}(x) - y_n^{*(k)}(x) \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right) \tag{15}$$

per i nodi di Cebyšev e

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| y^{*(k)}(x) - y_n^{*(k)}(x) \right| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-(1/2)}}\right) \tag{16}$$

per i nodi di Gauss (2) $(k = 0, 1, \cdots, m)$, *non appena siano soddisfatte per* $r \geq 0$ *le condizioni:*

1° $y^r(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $p_s^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 0$ $(s = 1, 2, \cdots, m)$;

2° *per* $a \leq x, t \leq b$ $q_s(x, t)$ *posseggono le derivate parziali continue rispetto a x sino all'ordine r incluso, essendovi uniformemente rispetto a t* $\partial^r q_s / \partial x^r \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(s = 0, 1, \cdots, m)$ *e*

3° λ *non è un autovalore del problema considerato.*

TEOREMA 2. – *Nell'ipotesi che per i punti $x_i \in [a, b]$ spettanti al metodo di collocazione sono stati scelti i nodi di Cebyšev oppure quelli di Gauss, il sistema di equazioni lineari algebriche*

$$(\mathcal{K}_i y_n)(x_i) = f(x_i) \quad , \quad a \leq x_i \leq b \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{17}$$

corrispondente alla soluzione approssimata (11) *è risolubile per i valori di n abbastanza grandi e le soluzioni approssimate y_n^* convergono verso la soluzione esatta y^* del problema* (13) *e*

$$(\mathcal{K}_1 y)(x) \equiv y^{(m)}(x) - \lambda \left[\sum_{s=1}^{m} p_s(x)\, y^{(m-s)}(x) + \int_a^x \sum_{s=0}^{m} q_s(x, t)\, y^{(n-s)}(t)\, \mathrm{d}t \right] = f(x), \tag{18}$$

nel modo che siano valide le uguaglianze (15) *e* (16) *non appena risultino soddisfatte per $r \geq 0$ le condizioni* 1°, 3° *e*

4° *per* $a \leq t \leq x \leq b$ $q_s(x, t)$ *posseggono derivate parziali continue rispetto a x sino all'ordine r incluso, essendovi uniformemente rispetto a t* $\partial^r q_s / \partial x^r \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *e* $d^{r-1} q_s(x, x)/dx^{r-1} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $(s = 0, 1, \cdots, m)$.

4. Si perviene ad una serie di teoremi di valutazione dell'ordine di convergenza del metodo di collocazione [18], [19] come pure alla programmazione nel quadro del procedimento ALGOL [20], [21], spettanti ai sistemi alle

(2) Per i nodi di Gauss si suppone $\alpha > \frac{1}{2}$ per $r = 0$ ove $\mathcal{H}$ rappresenta l'operatore differenziale armonico Δ o poliarmonico $\Delta^{(k)}$ (M. PICONE [22], [23]), calorico $\Delta - \frac{\partial}{\partial t} \equiv \triangle$ o policalorico $\triangle^{(k)}$ (M. NICOLESCO [24], [25]), delle corde vibranti $\mathrm{M} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ o polivibrante $\mathrm{M}^{(k)}$ (D. MANGERON [26], [27]).

derivate parziali in due variabili

$$\mathcal{H}[\varphi] = h(x, y) \quad , \quad M(x, y) \in D, \tag{19}$$

$$\varphi[P] \quad \text{data su} \quad P(x, y) \in \Omega \equiv Fr\,\mathfrak{D}, \tag{20}$$

ove si consideri per polinomio di approssimazione completo $P^*(x, y)$ in due variabili, di grado n in x e p in y, che prenda in $(n-1) \times (p-1)$ punti M_{ij} $(i = [1, 2, \cdots, n-1], j = [1, 2, \cdots, p-1]) \in \mathfrak{D}$ il valore $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$ in modo che in esso punto l'equazione sia strettamente verificata:

$$P^*(x, y) = \Big[\big[[1\, x \cdots x^n]\, [L_x^*]\big] \otimes \big[[1\, y \cdots y^p]\, [L_y^*]\big]\Big] \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \vdots \\ \varphi_{1,p-1} \\ \vdots \\ \varphi_{ij} \\ \vdots \\ \varphi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \varphi_{n-1,p-1} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

ove $[L_x^*]$ e $[L_y^*]$ sono le matrici di Lagrange costruite per i punti $[x_0, x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n]$ e $[y_0, y_1, \cdots, y_j, \cdots, y_p]$, troncate delle loro colonne estreme, se si tiene conto del fatto che $\varphi(x, y)$ è nullo sulla frontiera Ω di $\mathfrak{D}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. PICONE, *Fondamenti di Analisi funzionale lineare*. Ed. Ist. Naz. di Alta Matematica, Roma, Città Universitaria, 1943.

[2] L. COLLATZ, *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*. Springer-Verlag. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.

[3] M. PICONE, *I.N.A.C., L'inaugurazione della calcolatrice elettronica*. Allocuzione pronunziata il giorno dell'inaugurazione, «La Ricerca Scient.», anno *26°*, n. 1 (1956).

[4] M. PICONE, Prefazione al volume: *Giudizi sull'opera trentennale dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*. Pubblicazione dell'I.N.A.C., Roma, 1959.

[5] M. PICONE, *Ciò che ha dato e ciò che può dare l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo*, «Rassegna delle Poste, dei Telegrafi e dei Telefoni», Nov. 1933.

[6] YU. M. BEREZANSKI, *Razloženie po sobstvennym funktiam samosopreažennyh operatorov* (*Sviluppi in serie di autofunzioni concernenti gli operatori autoconiugati*). Ed. Naukova Dumka, Kiev, 1965.

[7] D. MANGERON, *Sur les problèmes à la frontière concernant certaines classes d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, «C. r. Acad. Sci., Paris», *255*, 2894-2896 (1962); *204*, 94-96, 544-546, 1022-1024 ed altri ancora (1937).

[8] D. MANGERON, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore*, «Rend. Accad. Naz. dei Lincei», Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 8ª, XXXIV (2), 118-122 (1963).

[9] D. MANGERON, *A new Class of Boundary Value Problems related to the optimal Processes Theory*, «Comunic. Acad. R.P.R.», XIII, 1023-1029, 1031-1034, 665-670 (1963).

[10] D. MANGERON, *The Bellman Equations of Dynamic Programming concerning a New Class of Boundary Value Problems with «Total Derivatives»*, « J. Math. Analysis a. Appl. », *9* (1), 146 (1964).

[11] J. LEGRAS, *Précis d'Analyse Numérique*, Dunod, Paris 1963.

[12] PH. NOËL, *Problèmes de Calcul numérique. – I. Interpolation à une et à deux variables*, « Bul. Inst. politehn. Iași », s.n., XI/XV (3–4), (1965).

[13] PH. NOËL, *Réduction des erreurs de chute par la représentation langrangienne des polynomes*. Thèse pour l'obtention du Doctorat de Spécialité Mathématiques. Université de Nancy, Faculté des Sciences, 1965.

[14] L. COLLATZ, *Cislennye metody rešenia differentzialnyh uravnenii* (*Metodi numerici di risoluzione delle equazioni differenziali*), I. L., Mosca 1953, p. 183.

[15] D. MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-diffierenziali a derivate totali nel senso di Picone*. (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*), « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 8ª, XXXI (1–2), 27–32 (1961).

[16] D. MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, *Sistemi policalorici a rimanenza ed a argomento ritardato. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatore calorico ed argomento ritardato*. Dedicata a Mauro Picone nel suo 80° compleanno, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 1–24 (1965).

[17] E. B. KARPILOVSKA, *O shodimosti metoda collocatzii*. (*Sulla convergenza del metodo di collocazione*), « Doklady Akad. Nauk SSSR », *151* (4), 766–786 (1963).

[18] E. B. KARPILOVSKA, *Issledovanie bystroty shodimosti metoda collocatzii dlia nekotoryh lineinyh integro-differentzialnyh uravnenii*. (*Studio concernente la rapidità della convergenza del metodo di collocazione spettante ad alcune equazioni integro-differenziali*). Gos. Universitet, Leningrad 1963.

[19] M. K. JAIN e M. M. CHAWLA, *Convergence of the Collocation Method and Estimates for the Error-Norm*. Indian Institute of Technology, New Delhi, Research Report No. 8, Dec. 1965, 24 pp.

[20] BOLLIET-GASTINEL-LAURENT, *ALGOL un nouveau langage*, Hermann, Paris 1963.

[21] J. LEGRAS, *Une écriture mathématique adaptée à la programmation l'ALGOL*, « Bul. Inst. politehn. Iași », s.n., X/XIV (3–4), 51–60 (1964).

[22] M. PICONE, *Sulle funzioni metaarmoniche*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 6ª, VI (1927).

[23] M. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques*. Hermann, Paris 1936.

[24] M. NICOLESCU, *Ecuatia iterată a căldurii* (*Equazione iterata della propagazione del calore*), « Studii și cercetări matematice », Acad. R.P.R., V (3–5) 243–332 (1954).

[25] D. MANGERON e L. E. KRIVOŞEIN, *Nuovi problemi concernenti sistemi funzionali con operatori iterati. – I. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatori calorici ed argomenti ritardati*. (*A Mauro Picone nel suo 80° compleanno*), « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 8ª, XXXVIII (5) 614–620 (1965).

[26] D. MANGERON, *Calcul numérique des solutions des systèmes différentiels polyvibrantes*. Colloque sur les fonctions convexes et le Calcul numérique. Inst. de Calcul de l'Acad. R.P.R., Cluj, 1–5 Juillet 1965. Programme.

[27] J. FAVARD, *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites « équations de Mangeron »*, « Bul. Inst. politehn. Iași », s.n., XI/XV (1–2) 17–20 (1965).