Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Franca Graiff

## Sull'energia negli Universi chiusi. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **40** (1966), n.1, p. 50–57.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_1_50_0>

**Relatività.** — *Sull' energia negli Universi chiusi.* Nota I [*] di
FRANCA GRAIFF, presentata [**] dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — The author considers the problem to determine the « energy-momentum » density and the « energy-momentum » vector in the closed Universes of General Relativity.
In this first part of the paper, after some remarks, in order to define in covariant form the « energy-momentum » vector, the « two-event » tensors are considered.

INTRODUZIONE. – Nella Relatività ristretta, la definizione di « Energia–quantità di moto » totale di un sistema materiale, è abbastanza semplice: la densità di « energia–quantità di moto » viene rappresentata da una densità tensoriale doppia simmetrica $\mathcal{T}_i^k$, la cui forma dipende dalla natura del sistema considerato (materia disgregata, fluido, ecc.), le leggi di conservazione locali vengono tradotte dalla solenoidalità di $\mathcal{T}_i^k$:

$$\text{(a)} \qquad \mathcal{T}_{i\ /k}^{k} = 0$$

(la / indica derivazione covariante). Per definire ora l'energia–quantità di moto totale e le leggi di conservazione in forma integrale, basta integrare: ma questi integrali, sia di Universo che di ipersuperficie, non sono relativi a invarianti, ma a componenti di vettori. Proprio perché lo spazio–tempo della Relatività ristretta è pseudo–euclideo, si può far ricorso a riferimenti cartesiani ortogonali, nei quali ha senso vettoriale l'integrale relativo a componenti di vettori [1] e la derivata covariante si riduce alla derivata ordinaria, così che le (a) risultano (la virgola indica derivazione ordinaria):

$$\text{(a')} \qquad \mathcal{T}_{i\ ,k}^{k} = 0 .$$

Nelle formule integrali si può quindi usare il teorema di Stokes (o le sue estensioni), ricavando significative formule di conservazione globali.

Nella Relatività generale il problema è molto più difficile. Per analogia con la Relatività ristretta, si postula che la densità di « energia–quantità di moto» sia rappresentabile da « oggetti », generalmente a due indici, $\mathcal{T}_i^k$ soddisfacenti identità di conservazione. Ma l'Universo della Relatività generale non ha struttura pseudo–euclidea, perché la materia gravitante non ne risulta estranea, ma ne fa parte, determinandone la geometria. Non si può allora ricorrere a riferimenti cartesiani per sfruttarne le proprietà precedentemente usate; quindi: integrali relativi a sistemi a un indice, necessari per definire l'energia totale, non hanno significato vettoriale; d'altra parte, per poter

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1966.

(1) M. PASTORI, *Un'insidia nell'uso di coordinate generali* « Bollett. U.M.I. », ser. III, vol. II (1956).

applicare il teorema di Stokes, negli integrali stessi, la densità $\mathfrak{T}_i^k$ deve soddisfare le (a′), che non sono di natura tensoriale. Come si può allora definire, in forma covariante, l'energia–quantità di moto totale di un sistema materiale, mediante densità di carattere tensoriale?

In questa Nota mostro come, con l'introduzione dei tensori « due eventi » si riesca a conciliare esigenze che sembrano opposte, soddisfacendo quindi il principio di Relatività generale, per il quale un risultato non ha significato fisico se non è stabilito in forma invariante.

1. DENSITÀ E SUPERPOTENZIALI. – In ogni varietà riemanniana c'è sovrabbondanza di « oggetti » conservativi $\mathfrak{T}_i^k$ soddisfacenti le (a′) (2). A loro volta essi risultano la divergenza ordinaria di superpotenziali $\mathfrak{U}_i^{kl}$, emisimmetrici rispetto agli indici $k$ e $l$, anch'essi, come i $\mathfrak{T}_i^k$ di natura non necessariamente tensoriale:

(b) $$\mathfrak{T}_i^k = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{U}_{i\ \ ,l}^{kl}.$$

Le (a′) sono condizioni soltanto necessarie affinché $\mathfrak{T}_i^k$ possa essere interpretato come densità di energia: esse sono infatti di natura locale; per il principio di equivalenza tra massa gravitazionale ed inerziale, non sono sufficienti considerazioni di carattere solo locale per « separare » l'energia gravitazionale dalla inerziale (un analogo problema si presenta quando si vogliono scindere le « forze » relativistiche in gravitazionali ed inerziali (3)); per una opportuna e significativa scelta di $\mathfrak{T}_i^k$ sono necessarie quindi considerazioni di carattere anche globale: in questo caso occorre che integrali relativi al sistema stesso diano risultati fisicamente accettabili.

La divergenza ordinaria nelle (a′) e (b) permette, mediante il teorema di Stokes e le sue estensioni, di trasformare integrali di Universo in integrali di ipersuperficie, e questi ultimi, in integrali di superficie.

Esistono strutture di Universi (Universi chiusi) aventi ipersuperfici spaziali asintoticamente euclidee (piatte). Sulle superfici chiuse bidimensionali, contorno di queste ipersuperfici, sarà quindi possibile il trasporto parallelo a distanza finita ed avrà quindi senso l'integrazione di un campo vettoriale.

In questa Nota cerco di sfruttare il lato positivo delle (a′) e (b), eliminandone il lato negativo: a questo scopo, per Universi chiusi, definisco superpotenziali ed oggetti conservativi come tensori « due eventi »: in questo modo mi è possibile dare carattere tensoriale alle (a′) e (b); carattere covariante ad un sistema semplice ottenuto mediante integrazione di componenti di vettori; definire così, in un riferimento generico, il vettore « energia–quantità di moto » e dare alle leggi di conservazione globali forma tensoriale. Queste si presentano quindi come le più semplici leggi di moto, conseguenza delle

(2) Cfr. F. GRAIFF, *Sui superpotenziali nella teoria della Relatività Generale*, questi « Rend. », ser. VIII, vol. XXXIX (1965) e relativa bibliografia.

(3) F. GRAIFF, *Sull'uso di coordinate armoniche in Relatività Generale*, questi « Rend. », ser. VIII, vol. XXXV (1963).

equazioni di campo, espresse in forma tensoriale: in esse si riflette la struttura intrinseca dell'Universo, « forgiata » da una distribuzione di materia attraverso le equazioni di campo.

2. IDENTITÀ DI CONSERVAZIONE. – In una varietà riemanniana, in ogni riferimento, esistono delle identità di conservazione, relative ad uno pseudo-tensore canonico $\Theta_i^k$ di Einstein:

$$\Theta_{i\ ,k}^{k} \equiv 0 \,. \tag{1}$$

A sua volta, $\Theta_i^k$ è deducibile, per divergenza ordinaria, dal superpotenziale $\mathfrak{U}_i^{kl}$ di Freud [4]:

$$\Theta_i^k \equiv -\frac{1}{2}\,\mathfrak{U}_{i\ ,l}^{kl} \equiv \mathfrak{G}_i^k + \frac{1}{2}\,t_i^k \tag{2}$$

con $\mathfrak{G}_i^k$ densità tensoriale di Ricci–Einstein; $t_i^k$ pseudo–tensore, quadratico nelle derivate prime ordinarie del tensore fondamentale. Sia $\Theta_i^k$ che $\mathfrak{U}_i^{lk}$ (come i simboli di Christoffel), si trasformano con leggi tensoriali solo per trasformazioni lineari di coordinate: per questo appunto sono detti pseudo–tensori.

La (1) può essere scritta nella equivalente forma integrale:

$$\int_V \Theta_i^k \, d\mathrm{V}_k \equiv 0 \tag{1'}$$

essendo V un'ipersuperficie chiusa, contorno di una regione di Universo, $d\mathrm{V}_k = \delta_{kpqr}\, dx^p\, \delta x^q\, \Delta x^r$ ; $dx^p$, $\delta x^q$, $\Delta x^r$ tre vettori infinitesimi linearmente indipendenti dell'ipersuperficie V; $d\mathrm{V}_k$ risulta quindi una capacità vettoriale, normale ad ogni direzione dell'ipersuperficie stessa.

I lati negativi che questo pseudo–tensore presenta qualora lo si voglia scegliere per definire la densità di « energia–quantità di moto » in un Universo generico sono:

*a*) si può sempre scegliere un riferimento per il quale sia nullo in un punto;

*b*) si può sempre scegliere un riferimento nel quale sia diverso da zero anche in un universo vuoto (pseudo–euclideo);

*c*) le (1) e (1') non sono identità tensoriali, pur essendo verificate in ogni riferimento: non sono atte cioè a rappresentare « leggi ».

Malgrado questo, per taluni Universi, la scelta di $\Theta_i^k$ si dimostra felice, e porta a risultati fisicamente accettabili, purché vengano usate, nel calcolo, determinate cautele.

3. QUANTITÀ DI MOTO–ENERGIA PER UNIVERSI CHIUSI:

*a*) Se una distribuzione di materia determina, attraverso le equazioni di puro campo ($\mathrm{G}_{ik} = 0$), una varietà riemanniana per cui sia possibile un

(4) A. EINSTEIN, « Berl. Ber. », 778 (1915); P. FREUD, « Ann. Math. », *40*, 417 (1939).

riferimento $\bar{x}$ nel quale risulti:

$$\bar{g}_{ik} = \eta_{ik} + o\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \bar{g}_{ik,r} = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

essendo $g_{ik}$ il tensore fondamentale, $r$ la distanza misurata su una geodetica di una varietà spaziale $\sigma$ ($\bar{x}_0 =$ cost.) da un punto fisso, si dice che il sistema è isolato, l'Universo è chiuso. L'ipersuperficie $\sigma$ risulta quindi asintoticamente piatta (euclidea).

*b*) In questo riferimento si definiscano e si calcolino le quattro quantità:

$$\text{(3)} \qquad \bar{P}_i(\sigma) = \lim \int_\sigma \bar{\Theta}_i^k \, d\bar{V}_k = \lim \int_{\bar{x}_0 = \text{cost.}} \bar{\Theta}_i^0 \, d\bar{x}^1 \, d\bar{x}^2 \, d\bar{x}^3 = \lim \oint_\sigma \bar{\mathfrak{U}}_i^{kl} \, d\bar{S}_{kl}$$

dove il simbolo lim indica che l'integrale viene calcolato per l'intero spazio $\sigma$ ($\bar{x}_0 =$ cost.), S è la superficie bidimensionale chiusa che limita tale spazio, $dS_{kl} = \delta_{klpq} \, dx^p \, \delta x^q$ ; $dx^p$ , $\delta x^q$ vettori infinitesimi di S.

Se, nel sistema considerato, $\bar{\Theta}_i^k$ rappresenta la densità d'energia–quantità di moto, $\bar{P}_i$ rappresenta l'energia–quantità di moto totale.

Si può dimostrare (teorema di Klein–Einstein) che, per l'ipotesi *a*) e la definizione *b*), risulta:

1° $\bar{P}_i$ è finito e non dipende dalla particolare ipersuperficie $\sigma$:

$$\text{(4)} \qquad \frac{d\bar{P}_i}{d\bar{x}^0} = 0 ,$$

È questa una legge di conservazione relativistica; essa esprime la conservazione dell'energia–quantità di moto totali $\bar{P}_i$, definendo, nello stesso tempo, la condizione affinché un Universo non irradi;

2° $\bar{P}_i$ è invariante per una trasformazione di coordinate che, sul contorno, si riduca all'identità;

3° $\bar{P}_i$ si trasforma come le componenti covarianti di un vettore, per una trasformazione lineare di coordinate;

4° per 2° e 3°: $\bar{P}_i$ si trasforma come un vettore libero per tutte quelle trasformazioni di coordinate che, all'infinito spaziale, si riducono ad una trasformazione di Lorentz.

Per quanto sopra, almeno nel caso particolare considerato, mi sembra che la natura non tensoriale di $\Theta_i^k$ sia più un elemento positivo che negativo: è proprio perché $\Theta_i^k$ non è un tensore che, in un particolare riferimento $\bar{x}$ gode di proprietà tali da poter definire un « oggetto » $\bar{P}_i$ che, soddisfacendo la (4) può ben interpretarsi come « energia–quantità di moto » totali del sistema; ed è solo una particolare struttura dell'universo, cioè una particolare distribuzione di materia, che ammette il riferimento $\bar{x}$ per il quale è valida la (4).

Ma un elemento del tutto negativo di $\Theta_i^k$, dovuto appunto alla mancanza di carattere tensoriale, è la seguente constatazione: l'integrale:

$$\int_\sigma \bar{\Theta}_0^k \, d\bar{V}_k$$

esteso ad una regione *finita* dello spazio $\sigma$ ($\bar{x}_0 = \text{cost.}$), dovrebbe rappresentare il contenuto energetico di tale regione spaziale, e, come tale, dovrebbe essere indipendente dalle coordinate usate su $\sigma$ per il calcolo di tale integrale, pur dipendendo da $\sigma$ e dal suo contorno. Non essendo $\Theta_i^{\ k}$ una densità tensoriale, $\overline{\Theta}_0^k$ non si trasforma come una densità vettoriale per trasformazioni puramente spaziali di coordinate e quindi $\overline{\Theta}_0^k\, d\overline{V}_k$ non si comporta come un invariante: l'integrale considerato ha quindi un valore strettamente legato al sistema di coordinate usato per il suo calcolo.

Praticamente si può rimediare a questo grave inconveniente definendo un oggetto conservativo $\mathcal{T}_i^{\ k}$ per il quale valga la:

$$\overline{\Theta}_0^{\ k}\, d\overline{V}_k = \mathcal{T}_0^k\, dV_k . \tag{5}$$

Di questa proprietà godono appunto gli « oggetti conservativi » da me definiti in una precedente Nota [5].

Risulta quindi che il carattere non tensoriale dello pseudo–tensore canonico di Einstein ha dei lati positivi, in quanto permette di individuare un riferimento $\bar{x}$ per il quale valga la legge di conservazione (4); ma anche un lato negativo: Einstein accettò solo i lati positivi e concluse che il contenuto energetico di una regione spaziale finita non è definibile.

4. GLI INDICI DELLO PSEUDO–TENSORE ENERGETICO E DEI SUPERPOTENZIALI. – Dai teoremi e dalle proprietà precedenti, emergono queste osservazioni:

*a*) L'indice in basso, sia dello pseudo–tensore canonico, che del superpotenziale, ha un comportamento ed una funzione eterogenei rispetto agli indici in alto che, in ogni caso, vengono saturati. Lo stesso si può dire per gli indici dei vari superpotenziali e relativi « oggetti conservativi », definiti per ovviare agli inconvenienti di quelli di Einstein [6].

*b*) Poiché, per ottenere formule di conservazione in forma integrale, è necessario applicare alla (1) il teorema di Stokes (o le sue estensioni), occorre che la (1) stessa sia verificata per una divergenza ordinaria: questa coinciderebbe con quella tensoriale, se nella derivazione stessa l'indice in basso si comportasse come ordinale.

*c*) Se prendiamo in considerazione anche un superpotenziale di natura tensoriale (densità) a tre indici: $\mathfrak{U}_i^{\ kl}$, è proprio a causa dell'indice in basso che non si riesce ad ottenere, mediante una divergenza ordinaria, una densità tensoriale: $\mathfrak{U}_i^{kl}{}_{,l}$ non ha carattere tensoriale; lo ha soltanto se l'indice $i$ si comporta come ordinale nella derivazione, cioè non entra nella derivazione stessa.

*d*) Anche se si sono definiti i « superpotenziali » tensori (così che l'integrando dell'ultimo termine della (3) è un vettore), per calcolare il vettore « quantità di moto » (3) bisogna praticamente ridursi a lavorare nel riferimento $\bar{x}$ (nel quale poi questi superpotenziali coincidono con quello di Freud):

(5) Cfr. F. GRAIFF, loco primo citato.

(6) IDEM, e relativa bibliografia.

questo si può fare perché, sul contorno S di $\sigma$, lo spazio è piatto e le $\bar{x}$ ne risultano le coordinate cartesiane; dopo di che, si può definire, con la solita regola delle componenti covarianti dei vettori, la quantità di moto in un riferimento qualsiasi, anche accelerato rispetto al primo:

$$(3') \qquad P_i = \bar{P}_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} .$$

Naturalmente queste componenti non saranno più delle costanti e non soddisferanno una legge di conservazione nella forma (4).

*e*) Affinché sia $\bar{\Theta}_0^k \, d\bar{V}_k = \mathcal{T}_0^k \, dV_k$ basta che $\mathcal{T}_0^k$ si comporti come una densità tensoriale rispetto all'indice $k$, come un invariante rispetto all'indice o per trasformazioni di coordinate puramente spaziali.

5. TENSORI « DUE PUNTI ». – Un sistema di funzioni dei punti P e Q di due spazi $S_P$ e $S_Q$ rappresenta un tensore « due punti », qualora il sistema stesso, per una trasformazione di coordinate nel solo $S_P$ si comporti con legge tensoriale rispetto gli indici riguardanti i punti P, come un invariante rispetto gli indici riguardanti i punti Q e viceversa. Per es., se gli indici grandi si riferiscono ai punti P, quelli piccoli ai punti Q, la legge di trasformazione di una densità (rispetto ai punti P) tensoriale doppia « due punti » è [7]:

$$(6) \qquad \bar{\mathcal{T}}_i^K (\bar{x}_P \, \bar{x}_Q) = J(x_P) \, \mathcal{T}_r^S (x_P \, x_Q) \left(\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\right)_{x_Q} \left(\frac{\partial \bar{x}^K}{\partial x^S}\right)_{x_P}$$

I coefficienti di trasformazione che si riferiscono ai due indici nella (6) vengono calcolati nei due diversi spazi $S_P$ e $S_Q$, e non è necessario che le formule di trasformazione siano le stesse nei due spazi; solo per trasformazioni lineari eguali in ambedue gli spazi, non si distingue la precedente formula di trasformazione da quella di un normale tensore.

Gli spazi $S_P$ e $S_Q$ vengono definiti a seconda del problema che si vuol risolvere, e non è necessario che abbiano le stesse dimensioni; se hanno le stesse dimensioni e sono legati da una corrispondenza punto a punto, questo tensore « due punti » è del tutto analogo ai sistemi subordinati a due riferimenti [8]; infatti la trasformazione:

$$\bar{x} = \bar{x}(x)$$

può essere interpretata:

*a*) come una trasformazione di coordinate, cioè $x$ e $\bar{x}$ sono interpretabili come le coordinate di uno stesso punto in due riferimenti diversi;

*b*) come la definizione, in uno stesso riferimento, di una corrispondenza biunivoca tra punti.

(7) Cfr., ad esempio: *Handbuch der Physik*, vol. III/1, Berlin 1960 e relativa bibliografia sull'argomento.

(8) B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale ed applicazioni*, Bologna 1961.

Nella derivazione tensoriale si può derivare rispetto ai punti P oppure rispetto ai punti Q: gli indici riferentisi ai punti rispetto ai quali non si deriva, si comportano come ordinali nella derivazione stessa. Ad esempio, se $\mathfrak{A}_i^{\mathrm{KL}}(x_{\mathrm{P}}, x_{\mathrm{Q}})$ è una densità rispetto ai punti P, emisimmetrica negli indici K e L:

$$\mathfrak{A}_i{}^{\mathrm{KL}}{}_{,\mathrm{L}} \equiv \mathcal{T}_i^{\mathrm{K}}(x_{\mathrm{P}}\, x_{\mathrm{Q}}) \tag{7}$$

è una densità tensoriale « due punti ».

Per questi tensori è lecita, in spazi euclidei, anche l'integrazione mediante l'uso di componenti qualsiasi, anche non cartesiane. In tali spazi, per un tensore doppio « due punti », ha quindi senso l'integrale, in $S_{\mathrm{P}}$:

$$\mathrm{P}_i(x_{\mathrm{Q}}) = \int_{\mathrm{V}} \mathcal{T}_i^{\mathrm{K}}\, d\mathrm{V}_{\mathrm{K}}\,.$$

Le $\mathrm{P}_i(x_{\mathrm{Q}})$ si trasformano come le componenti di un vettore rispetto ad una generica trasformazione di coordinate in $S_{\mathrm{Q}}$.

Specialmente per quest'ultima proprietà R. Tupin ha assunto un tensore doppio « due eventi » per rappresentare, in un generico riferimento (anche non inerziale) il complesso « energia–quantità di moto » di un campo elettromagnetico, in presenza di materia, in uno spazio–tempo euclideo [9].

6. Sull'aspetto non tensoriale di tensori. – Al fine di giustificare le definizioni che mi propongo di dare, non è forse inutile, dopo la precedente definizione dei tensori « due punti », qualche considerazione sulle conseguenze dell'uso di riferimenti particolari.

1° a volte, per particolari, se pur spontanei, riferimenti, un tensore può coincidere con « oggetti » noti, non aventi carattere tensoriale: risulta allora difficile riconoscere il carattere tensoriale di tali « oggetti »; tipicamente, un tensore « due punti » può non distinguersi da un tensore ordinario in riferimenti cartesiani;

2° mediante i tensori « due punti » si possono costruire campi vettoriali o tensoriali ordinari; questo passaggio non si nota con l'uso di riferimenti cartesiani: esso ha, per un riferimento qualsiasi, un chiaro aspetto formale, ma implica senz'altro un significato essenziale.

Scende che l'uso di particolari riferimenti, adottati magari per motivi di semplicità formale, non rivela pienamente il carattere degli enti espressi e definiti nel loro ambito.

Un esempio di questa ambiguità, conseguenza dell'uso di riferimenti cartesiani, si incontra nel capitolo della meccanica classica riguardante spostamenti e relative deformazioni, in particolare spostamenti rigidi.

Consideriamo la formula che dà lo spostamento di un generico punto P di coordinate iniziali $y_k$ rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale

(9) Cfr. *Handbuch der Physik*, vol. III/1, Berlin 1960.

$(O, x)$ in uno spostamento rigido [10]:

$$s_i = c_i + (\alpha_{ik} - \delta_{ik})\, y^k \tag{°}$$

dove $\alpha_{ik}$ sono i coseni direttori di una terna $(\overline{O}, \overline{x})$ rispetto alla $(O, x)$, $\delta_{ik}$ i simboli di Kronecker e $c_i$ le componenti della traslazione $\overline{O} - O$, corrispondente allo spostamento delle origini. Poiché i coseni direttori, in un riferimento cartesiano, sono tensori « due punti », se non si tiene conto della genesi di questa formula, si è tentati di dire che essa non ha carattere tensoriale. Ma essa trae origine da due premesse, strettamente legate al tipo di riferimento usato, non aventi quindi alcun carattere invariantivo:

*a*) $s_i$ è dato dalle differenze delle coordinate, rispetto ad uno stesso riferimento, della posizione finale e iniziale del punto P;

*b*) se $\overline{x}_i$ sono le coordinate del punto P nella sua posizione finale, rispetto ad un opportuno riferimento $(\overline{O}, \overline{x})$, l'uguaglianza, per ogni punto P:

$$y_i = \overline{x}_i$$

definisce uno spostamento rigido. Da questo punto di vista, $s$ non avrebbe nemmeno carattere di vettore, in quanto può essere annullato da una trasformazione di coordinate, come è caratteristico per uno spostamento rigido.

Si può concludere allora che $(\alpha_{ik} - \delta_{ik})$ risulta, a causa delle definizioni non invariantive di partenza e del metodo usato per ricavare lo spostamento $s_i$ una particolare forma assunta da un particolare tensore doppio $T_{ik}$: allora $s_i$ risulta un particolarissimo spostamento omografico, e se ne calcolo il corrispondente tensore di deformazione in quel particolare riferimento [11] trovo, appunto, zero: è questo un risultato invariantivo, o, se si vuole, la definizione invariantiva di spostamento rigido: spostamento rigido è quel particolare spostamento omografico per cui è nullo il tensore di deformazione.

Per illustrare brevemente, con un esempio, il secondo punto, consideriamo il tensore di deformazione dovuto ad un generico spostamento regolare, finito. Esso può venir ricavato con metodo invariantivo [12], mediante operazioni eseguite su campi tensoriali « due punti ». Ne risulta però un campo tensoriale ordinario: la spiegazione formale è chiara, ed è dovuta al meccanismo di composizione dei tensori « due punti »; ma la spiegazione essenziale è che infiniti spostamenti regolari danno luogo ad una stessa deformazione: ognuno di essi può essere ottenuto da un altro « componendolo » con un opportuno spostamento rigido.

(10) Cfr. B. FINZI e M. PASTORI, loco citato.

(11) La consueta definizione di tensore di deformazione può essere messa in forma intrinseca.

(12) Cfr. *Handbuch der Physik*, vol. III/1, Berlin 1960.