Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Malca Bercovici, Arsenie Oprea, Florin Poterașu

Calcolo numerico. - I. Forme integrali del resto nell'approssimazione polinomiale Tayloriana pluridimensionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.1, p. 40–45.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_1_40_0>

Analisi matematica. — *Calcolo numerico.* – I. *Forme integrali del resto nell'approssimazione polinomiale Tayloriana pluridimensionale.* Nota di MALCA BERCOVICI, ARSENIE OPREA e FLORIN POTERAȘU (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

A Mauro Picone nel Suo 80° compleanno.

RÉSUMÉ. — En prenant le point de départ d'un théorème de Picone [1, pp. 668-669], les auteurs donnent, sous forme intégrale, dans le cadre du Calcul numérique, nombre de nouvelles formules des restes concernant l'approximation polynomiale Taylorienne à plusieurs dimensions.

1. Nell'ambito degli svariatissimi domini di Matematica pura ed applicata, il Calcolo numerico deve pur'esso la sua attrezzatura odierna, atta ad essere utilizzata dai centri di calcolatrici elettroniche, all'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone, il quale ne ha cristallizzato il suo fondamento sulla base profonda dell'Analisi funzionale nel Suo oramai classico *Trattato di analisi matematica* [1] e ne ha promosso un rapido sviluppo di esso calcolo in tutt'un insieme di lavori eseguiti sotto la Sua geniale guida nel quadro dell' INAC da Lui creato [2], [3] e diretto per un periodo di oltre tre decenni.

Alla base del quadro della determinazione di varie forme del resto spettante nel dominio dell'analisi funzionale lineare al problema generale di approssimazione [4], [5] sta il seguente

TEOREMA (di Picone) [1, pp. 668–669]. – *Se* $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ *è una funzione del punto* $X(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ *con coordinate reali* $x_1, x_2, \cdots, x_p$, *continua con le sue derivate parziali fino a quelle d'ordine* $n+1$ *incluse, nel campo connesso* A *dello spazio* $S_{(p)}$, *a* p *dimensioni, per il resto* $R(X)$, *d'indice* n, *della sua formola di Taylor riferita al punto* $X_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_p^0)$ *di* A, *sussiste, in* A, *l'eguaglianza*

$$(1)\qquad R_n(X) =$$

$$(C)\int_{X_0}^{X} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=n} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}(x_2-\xi_2)^{k_2}\cdots(x_p-\xi_p)^{k_p}}{k_1!\,k_2!\cdots k_p!}\, d\,\frac{\partial^n f}{\partial\xi_1^{k_1}\,\partial\xi_2^{k_2}\cdots\partial\xi_p^{k_p}},$$

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1966.

(**) Gli Autori esprimono al prof. Demetrio Mangeron i sensi di gratitudine per i consigli concessegli durante la preparazione del presente lavoro.

C *designando una qualsivoglia curva, composta di archi di classe uno, tracciata in* A, *terminata ai punti* X_0 *e* X. *Si ha, cioè, in* A

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_0 (x - x_k^0) + \cdots \tag{2}$$

$$+ \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=n} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_p^{k_p}}\right)_0 \frac{(x_1 - x_1^0)^{k_1} (x_2 - x_2^0)^{k_2} \cdots (x_p - x_p^0)^{k_p}}{k_1!\, k_2! \cdots k_p!}$$

$$+ (C)\int_{X_0}^{X} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=n} \frac{(x_1 - \xi_1)^{k_1} (x_2 - \xi_2)^{k_2} \cdots (x_p - \xi_p)^{k_p}}{k_1!\, k_2! \cdots k_p!}\, d\, \frac{\partial^n f}{\partial \xi_1^{k_1} \partial \xi_2^{k_2} \cdots \partial \xi_p^{k_p}},$$

dove, col simbolo

$$\left(\frac{\partial^\nu f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_p^{k_p}}\right)_0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n \; ; \; k_1 + k_2 + \cdots + k_p = \nu)$$

è stato indicato il valore della derivata $\partial^\nu f / \partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_p^{k_p}$ *nel punto* X_0, *e con*

$$\frac{\partial^n f}{\partial \xi_1^{k_1} \partial \xi_2^{k_2} \cdots \partial \xi_p^{k_p}}$$

il valore della stessa derivata nel punto $\Xi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$ *della curva* C.

2. In ciò che segue gli Autori presentano, nelle ipotesi di cui sopra, nel caso della considerazione della formola del tipo di Taylor

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_p) - T(x_1, x_2, \cdots, x_p) = R_{n=k_1+k_2+\cdots+k_p}(x_1, x_2, \cdots, x_p), \tag{3}$$

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \sum_{i_p=0}^{k_p} \sum_{i_{p-1}=0}^{k_{p-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{k_1} f^{i_1+i_2+\cdots+i_p}_{x_1^{i_1} x_2^{i_1} \cdots x_p^{i_p}}(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_p^0) \cdot \tag{4}$$

$$\cdot \frac{(x_1 - x_1^0)^{i_1} (x_2 - x_2^0)^{i_2} \cdots (x_p - x_p^0)^{i_p}}{i_1!\, i_2! \cdots i_p!},$$

$$\left(\frac{\partial T^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_p}(x_1, x_2, \cdots, x_p)}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \cdots \partial x_p^{\nu_p}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_p} f(x_1, x_2, \cdots, x_p)}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \cdots \partial x_p^{\nu_p}}\right)_0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_p} R(x_1, x_2, \cdots, x_p)}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \cdots \partial x_p^{\nu_p}}\right)_0 = 0,$$

$$\nu_i = 0, 1, \cdots, k_i \; ; \; i = 1, 2, \cdots, p),$$

$$\frac{\partial^{k_i+1} R(x_1, \cdots, x_2, x_p)}{\partial x_i^{k_i+1}} = \frac{\partial f^{k_i+1}(x_1, x_2, \cdots, x_p)}{\partial x_i^{k_i+1}}, \cdots, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_p+p} R(x_1, x_2, \cdots, x_p)}{\partial x_1^{k_1+1} \partial x_2^{k_2+1} \cdots \partial x_p^{k_p+1}} = \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_p+p} f(x_1, x_2, \cdots, x_p)}{\partial x_1^{k_1+1} \partial x_2^{k_2+1} \cdots \partial x_p^{k_p+1}},$$

limitandoci, per economia di spazio, ai casi di $n = 2, 3, 4, 5$, le seguenti espressioni integrali del resto nell'approssimazione polinomiale Tayloriana pluridimensionale, rimandando il lettore per gli sviluppi algoritmici e per le discussioni concernenti il numero e la scelta ottimale delle varianti delle formole stabilite ad un articolo di prossima pubblicazione nel « Bollettino dell'Istituto politecnico di Iași »:

$$\text{(7)}\quad \mathrm{R}(x_1, x_2) = \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{\partial^{k_1+1} f(\xi_1, x_2)}{\partial\xi_1^{k_1+1}} d\xi_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi_2)^{k_2}}{k_2!} \frac{\partial^{k_2+1} f(x_1, \xi_2)}{\partial\xi_2^{k_2+1}} d\xi_2 -$$

$$- \int_{\mathrm{X}_0}^{\mathrm{X}} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1} (x_2-\xi_2)^{k_2}}{k_1!\, k_2!} \frac{\partial^{k_1+k_2+2} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial\xi_1^{k_1+1} \partial\xi_2^{k_2+1}} d\xi_1\, d\xi_2 ;$$

$$\text{(8)}\quad 2\,\mathrm{R}(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{\partial^{k_1+1} f_1(\xi_1, x_2, x_3)}{\partial\xi_1^{k_1+1}} d\xi_1 +$$

$$+ \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi_2)^{k_2}}{k_2!} \frac{\partial f_2^{k_2+1}(x_1, \xi_2, x_3)}{\partial\xi_2^{k_2+1}} d\xi_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_3-\xi_3)^{k_3}}{k_3!} \frac{\partial^{k_3+1} f_3(x_1, x_2, \xi_3)}{\partial\xi_3^{k_3+1}} d\xi_3 -$$

$$- \int_{\mathrm{X}_0}^{\mathrm{X}} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1} (x_2-\xi_2)^{k_2} (x_3-\xi_3)^{k_3}}{k_1!\,, k_2!\,, k_3!} \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+3} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial\xi_1^{k_1+1} \partial\xi_2^{k_2+1} \partial\xi_3^{k_3+1}} d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3,$$

$$\text{(9)}\quad \begin{cases} f_1(\xi_1, x_2, x_3) = f(\xi_1, x_2, x_3) + f(\xi_1, x_2^0, x_3^0), \\ f_2(x_1, \xi_2, x_3) = f(x_1, \xi_2, x_3) + f(x_1^0, \xi_2, x_3), \\ f_3(x_1, x_2, \xi_3) = f(x_1, x_2, \xi_3) + f(x_1^0, x_2^0, \xi_3); \end{cases}$$

$$\text{(10)}\quad 3\,\mathrm{R}(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

$$= \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{\partial^{k_1+1} f_1(\xi_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial\xi_1^{k_1+1}} d\xi_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi_2)^{k_2}}{k_2!} \frac{\partial^{k_2+1} f_2(x_1, \xi_2, x_3, x_4)}{\partial\xi_2^{k_2+1}} d\xi_2 +$$

$$+ \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_3-\xi_3)^{k_3}}{k_3!} \frac{\partial^{k_3+1} f_3(x_1, x_2, \xi_3, x_4)}{\partial\xi_3^{k_3+1}} d\xi_3 + \int_{x_4^0}^{x_4} \frac{(x_4-\xi_4)^{k_4}}{k_4!} \frac{\partial^{k_4+1} f_4(x_1, x_2, x_3, \xi_4)}{\partial\xi_4^{k_4+1}} d\xi_4 -$$

$$- \int_{\mathrm{X}_0}^{\mathrm{X}} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1} (x_2-\xi_2)^{k_2} (x_3-\xi_3)^{k_3} (x_4-\xi_4)^{k_4}}{k_1!\, k_2!\, k_3!\, k_4!} \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+k_4+4} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial\xi_1^{k_1+1} \partial\xi_2^{k_2+1} \partial\xi_3^{k_3+1} \partial\xi_4^{k_4+1}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4,$$

$$(11)\quad \begin{cases} f_1(\xi_1, x_2, x_3, x_4) = f(\xi_1, x_2, x_3, x_4) + f(\xi_1, x_2^0, x_3, x_4^0) + f(\xi_1, x_2, x_3^0, x_4^0), \\ f_2(x_1, \xi_2, x_3, x_4) = f(x_1, \xi_2, x_3, x_4) + f(x_1^0, \xi_2, x_3, x_4^0) + f(x_1^0, \xi_2, x_3^0, x_4^0), \\ f_3(x_1, x_2, \xi_3, x_4) = f(x_1, x_2, \xi_3, x_4) + f(x_1^0, x_2^0, \xi_3, x_4) + f(x_1^0, x_2^0, \xi_3, x_4^0), \\ f_4(x_1, x_2, x_3, \xi_4) = f(x_1, x_2, x_3, \xi_4) + f(x_1^0, x_2, x_3^0, \xi_4) + f(x_1, x_2^0, x_3^0, \xi_4) : \end{cases}$$

$$(12)\quad 4\,\mathrm{R}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{\partial^{k_1+1} f_1(\xi_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}{\partial \xi_1^{k_1+1}} d\xi_1 +$$

$$+ \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi_2)^{k_2}}{k_2!} \frac{\partial^{k_2+1} f_2(x_1, \xi_2, x_3, x_4, x_5)}{\partial \xi_2^{k_2+1}} d\xi_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_3-\xi_3)^{k_3}}{k_3!} \frac{\partial^{k_3+1} f_3(x_1, x_2, \xi_3, x_4, x_5)}{\partial \xi_3^{k_3+1}} d\xi_3 +$$

$$+ \int_{x_4^0}^{k_4} \frac{(x_4-\xi_4)^{k_4}}{k_4!} \frac{\partial^{k_4+1} f_4(x_1, x_2, x_3, \xi_4, x_5)}{\partial \xi_4^{k_4+1}} d\xi_4 + \int_{x_5^0}^{k_5} \frac{(x_5-\xi_5)^{k_5}}{k_5!} \frac{\partial^{k_5+1} f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_5)}{\partial \xi_5^{k_5+1}} d\xi_5 -$$

$$- \int_{\mathrm{X}_0}^{\mathrm{X}} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}(x_2-\xi_2)^{k_2}\cdots(x_5-\xi_5)^{k_5}}{k_1!\,k_2!\cdots k_5!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_5+5} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)}{\partial \xi_1^{k_1+1} \partial \xi_2^{k_2+1} \cdots \partial \xi_5^{k_5+1}} d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_5,$$

$$(x_i^0 \leq \xi_i \leq x_i \quad ; \quad i = 1, 2, \cdots),$$

$$(13)\quad \begin{cases} f_1(\xi_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(\xi_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + f(\xi_1, x_2^0, x_3^0, x_4, x_5) + \\ \qquad + f(\xi_1, x_2, x_3^0, x_4^0, x_5) + f(\xi_1, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0), \\ f_2(x_1, \xi_2, x_3, x_4, x_5) = f(x_1, \xi_2, x_3, x_4, x_5) + f(x_1^0, \xi_2, x_3, x_4^0, x_5) + \\ \qquad + f(x_1, \xi_2, x_3^0, x_4, x_5^0) + f(x_1^0, \xi_2, x_3^0, x_4^0, x_5^0), \\ f_3(x_1, x_2, \xi_3, x_4, x_5) = f(x_1, x_2, \xi_3, x_4, x_5) + f(x_1, x_2, \xi_3, x_4^0, x_5^0) + \\ \qquad + f(x_1, x_2^0, \xi_3, x_4^0, x_5) + f(x_1^0, x_2^0, \xi_3, x_4^0, x_5^0), \\ f_4(x_1, x_2, x_3, \xi_4, x_5) = f(x_1, x_2, x_3, \xi_4, x_5) + f(x_1, x_2^0, x_3, \xi_4, x_5^0) + \\ \qquad + f(x_1^0, x_2, x_3, \xi_4, x_5^0) + f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \xi_4, x_5^0), \\ f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_5) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_5) + f(x_1^0, x_2, x_3^0, x_4, \xi_5) + \\ \qquad + f(x_1^0, x_2^0, x_3, x_4, \xi_5) + f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, \xi_5). \end{cases}$$

3. In una Nota futura saranno esposti vari risultati concernenti il resto degli sviluppi in serie di autofunzioni degli operatori autoconiugati alle derivate totali nel senso di Picone [6], studiati sistematicamente dal Mangeron [7], [8], utilizzati poscia da numerosi Autori tra cui J. Favard [9], R. Bell-

man [20], Yu. M. Berezanski [11], L. E. Krivošein [12], T. Kamytov [13] ed altri ancora ed aventi per prototipo il sistema differenziale

$$[A(X)\, u'(X) + \lambda B(X)\, u(X)]' + \lambda\, [(B(X)\, u'(X) + C(X)\, u(X)] = 0,$$

$$u(X)\,|_{FrR^*} = 0\,,\ R^* = \{x_i^* \leq x \leq x_i^{**}\} \qquad (i = 1, 2, \cdots, p),$$

la cui novità consiste nel fatto che R^* è un dominio « rettangolare » a p dimensioni ed il simbolo $'$ denota la derivata totale prima

$$u'(X) \equiv \frac{\partial^p u(X)}{\partial x_1\, \partial x_2 \cdots \partial x_p},$$

mentre in un'altra di prossima pubblicazione i risultati conseguiti sono stati collegati con la cospicua mole di risultati pubblicati nel quadro dell'Istituto di Calcolo di Cluj, diretto dal T. Popoviciu [14]–[17].

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. PICONE e G. FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, Vol. II, Tumminelli, Roma, 1955, 883 pp.

[2] M. PICONE, *Sur l'oeuvre mathématique de l'Institut National italien pour les Applications du Calcul*. III Congrès des Mathématiciens de l'URSS. Moscou 1956.

[3] M. PICONE, *Discorso tenuto durante la cerimonia dedicata al proprio giubileo*. Fascicolo pubblicato a cura del Comitato per le onoranze a Mauro Picone. Roma, Città Universitaria, 1956.

[4] L. COLLATZ, *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*. Springer–Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1964, XIV, 371 pp.

[5] KÔSAKU YOSIDA, *Functional Analysis*. Springer–Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965, XI, 458 pp.

[6] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica-Matematica*, « Annales Sci. Univ. Jassy », I Section (Math., Phys., Chimie), XXVI, *1*, 183–232 (1940).

[7] D. MANGERON, *Sur les problèmes à la frontière concernant une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « C.r. Acad. Sci., Paris », *204*, 94–96; 544–546; 1022–1024 (1937), *255*, 2894–2896 (1962).

[8] D. MANGERON, *New Class of Equations related to the Equations with "total derivatives" in the Picone sense*, « Bul. Inst. polithen. Iași », s. n., IV (VIII), *3–4*, 73–78 (1958).

[9] J. FAVARD, *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites "équations de Mangeron"*, « Bul. Inst. politehn. Iași », s. n., XI (XV), *1–2*, 17–20 (1965).

[10] R. BELLMAN, *An approximate Procedure in Control Theory based on Quasilinearization*, « Bul. Inst. politehn. Iași », s. n., X (XIV), *3–4*, 5–10 (1964).

[11] YU. M. BERAZANSKI, *O kraevyh zadačah dlia obščih differentzial'nyh operatorah v častnyh proizvodnyh*. (*Sui problemi al contorno concernenti operatori differenziali generali a derivate parziali*), « Doklady Akad. Nauk SSSR », *122* (6), 959–962 (1958).

[12] L. E. KRIVOŠEIN, *Rešenie smešannoi zadači dlia odnogo klassa integro–differentzial'nyh uravenii v častnyh proizvodnyh*. (*Risoluzione di un problema misto per una classe di equazioni integro–differenziali alle derivate parziali*). Materialy 12–i naucinoi Conferentzii professorsko–prepodavatel'skogo sostava Fizico–Matematiceskogo Faculteta. Sectzia Matematiki, Kirgizskii Gos. Universitet, Frunze 1964, pp. 21–24.

[13] T. KAMYTOV, *Približennoe rešenie nekotoryh zadač dlia nelineinah integro–differentzial'nyh uravnenii.* (*Risoluzione approssimativa di alcuni problemi concernenti equazioni integro–differenziali*). Doklady Tretiei Sibirskoi Conferentzii po Matematike i Mehanike. Izd. Tomskogo Universiteta, Tomsk 1964, pp. 113–115.

[14] T. POPOVICIU, *Sur le reste dans certains formules linéaires d'approximation de l'Analyse,* «Mathematica, Cluj», *I* (24), 95–142 (1959).

[15] D. D. STANCU, *Expresia integrală a restului într–o formulă de tip Taylor pentru funcțiile de două variabile,* «Studii și cercetări mat., Acad. R.P.R. Fil. Cluj», *II* (1) 177–183 (1960).

[16] D. V. IONESCU, *Formules pratiques d'intégration numérique des équations différentielles du second ordre.* Colloque d'approximation des fonctions, avec applications au Calcul numérique. Acad. R.P.R. Fil. Cluj, Inst. Calcul, 15–19 novembre 1963.

[17] D. MANGERON, *Approximation des solutions de certaines classes de problèmes à la frontière polyvibrantes et aux dérivées totales aux sens de M. Picone.* Colloque d'Analyse fonctionnelle et de Calcul numérique. Acad. R.P.R., Cluj, Inst. Calcul, 1–5 luglio 1965.