Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maurice Koskas

Théorie des hypertas. Applications à la thèorie des demi-groupes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.1, p. 35–39.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_1_35_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Algebra. — *Théorie des hypertas. Applications à la thèorie des demi-groupes.* Nota di MAURICE KOSKAS, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Definita la struttura d'ipermucchio (« hypertas ») ed introdotta la nozione d'ipermucchio inverso, vengono studiate certe equivalenze definite su un ipermucchio, in particolare quella detta principale che permette di generalizzare certi risultati di P. Dubreil [2] sui gruppi omomorfi ad un semigruppo. La teoria viene poi applicata allo studio dei semigruppi inversi e stazionari.

La notion de tas a été introduite par P. Grillet [3]. Je la généralise en introduisant des applications multivoques. La structure ainsi introduite permet une étude synthétique des groupoides [4], demi-groupes, demi-hypergroupes [5], [6].

I. – GÉNÉRALITÉS.

Définitions. – Un *hypertas* est la donnée d'un ensemble E et d'un demi-groupe d'applications de E dans $\mathfrak{P}(E)$, noté $\mathfrak{D}$. (La composition de deux telles applications est définie de façon évidente). Une telle donnée est notée $(E, \mathfrak{D})$. Un hypertas $(E, \mathfrak{D})$ est appelé *pseudo-tas* (resp. *tas*) si quelque soient $\vartheta \in \mathfrak{D}$, $x \in E$, $\vartheta(x)$ possède au plus un élément (resp. exactement un élément).

Exemples. – D étant un demi-groupe, ou un demi-hypergroupe, ou un groupïde, soit $\mathfrak{R}$ (resp. $\mathfrak{L}$) le demi-groupe engendré par les translations à droite (resp. à gauche) de D. $(D, \mathfrak{R})$ et $(D, \mathfrak{L})$ sont des hypertas.

On trouvera dans [7] d'autres exemples d'hypertas.

Hypertas inverse. – $(E, \mathfrak{D})$ étant un hypertas, soit $\vartheta \in \mathfrak{D}$. Nous définissons une application de E dans $\mathfrak{P}(E)$ notée ${}_{\vartheta}\Gamma$, en posant:

$$\forall x , y \in E \quad , \quad y \in {}_{\vartheta}\Gamma(x) \Longleftrightarrow x \in \vartheta(y).$$

Nous notons $\mathfrak{D}'$ l'ensemble des applications de E dans $\mathfrak{P}(E)$ qui sont de la forme ${}_{\vartheta}\Gamma \cdot (\vartheta \in \mathfrak{D})$. On vérifie aisément que $\mathfrak{D}'$ est un demi-groupe anti-isomorphe à $\mathfrak{D}$, que $(E, \mathfrak{D}')$ est un hypertas. $(E, \mathfrak{D}')$ est appellé *hypertas inverse* de $(E, \mathfrak{D})$.

En appliquant cette opération aux exemples $(D, \mathfrak{R})$ et $(D, \mathfrak{L})$ donnés plus haut, on obtient deux nouveaux hypertas $(D, \mathfrak{R}')$ et $(D, \mathfrak{L}')$ qui nous seront utiles par la suite.

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1966.

2. – Equivalences régulières ou simplifiables.

N o t a t i o n s. – E étant un ensemble dont ρ est une équivalence, on peut prolonger ρ en une relation binaire définie sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$, en posant si A et B sont des élements de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$:

$$\mathrm{A}\,\rho\,\mathrm{B} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathrm{A}\,,\ \exists y \in \mathrm{B} : x\rho y \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathrm{B}\,,\ \exists x \in \mathrm{A} : x\,\rho\,y\,;$$

$$\mathrm{A}\,\bar{\bar{\rho}}\,\mathrm{B} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathrm{A}\,,\ y \in \mathrm{B}\,,\ x\,\rho\,y\,.$$

$\bar{\rho}$ est une équivalence, mais il n'en est pas de même de $\bar{\bar{\rho}}$.

D é f i n i t i o n. – Soit $(\mathrm{E}\,,\mathfrak{D})$ un hypertas. Une équivalence ρ définie sur E est dite:

$\mathfrak{D}$–régulière si $x\,\rho\,y\,,\ \vartheta \in \mathfrak{D} \Rightarrow \vartheta(x)\ \bar{\rho}\ \vartheta(y)$;

quasi–fortement $\mathfrak{D}$–régulière si $x\,\rho\,y\,,\ \vartheta \in \mathfrak{D} \Rightarrow \vartheta(x)\ \bar{\bar{\rho}}\ \vartheta(y)$;

fortement $\mathfrak{D}$–régulière si $x\,\rho\,y\,,\ \vartheta \in \mathfrak{D} \Rightarrow \vartheta(x)\ \bar{\rho}\ \vartheta(y)\,,\ \vartheta(x)\ \bar{\bar{\rho}}\ \vartheta(y)$;

$\mathfrak{D}$–simplifiable si $u\,\rho\,v\,,\ u \in \vartheta(x)\,,\ v \in \vartheta(y) \Rightarrow x\,\rho\,y$.

Nous désignerons par $\mathcal{F}_r$ (resp. $\mathcal{F}'_r\,,\ \mathcal{F}''_r\,,\ \mathcal{F}_s$) l'ensemble des équivalences de E, $\mathfrak{D}$–régulières (resp. quasi–fortement $\mathfrak{D}$–régulières, fortement $\mathfrak{D}$–régulières, $\mathfrak{D}$–simplifiables).

On trouvera dans [7] une étude de ces ensembles. La proposition suivante montre le rapport qui existe entre les notions de $\mathfrak{D}$–simplifiabilité et de quasi–forte $\mathfrak{D}$–régularité.

PROPOSITION 1. – *Soit* ρ *une équivalence définie sur* E.

Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) ρ *est $\mathfrak{D}$–simplifiable;*

b) ρ *est quasi fortement $\mathfrak{D}'$–régulière.*

Les définitions données ici peuvent être appliquées aux demi–groupes et aux demi–hypergroupes. Soit par exemple un demi–groupe D.

Les équivalences régulières à droite de D *sont celles qui sont $\mathfrak{R}$–régulières.*

Les équivalences simplifiables à droite de D *sont celles qui sont quasi–fortement $\mathfrak{R}'$–régulières.*

Soit d'autre part $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de complexes de D. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, soit ϑ_i l'application de D dans $\mathcal{P}(\mathrm{D})$ définie par

$$\vartheta_i(x) = \begin{cases} \mathrm{X}_i & \text{si} \quad x \in \mathrm{X}_i \\ x & \text{si} \quad x \notin \mathrm{X}_i\,. \end{cases}$$

Soit $\mathfrak{D}$ le demi–groupe engendré par $\mathfrak{R}$ et par les applications ϑ-.

On a alors le résultat suivant:

Les équivalences fortement $\mathfrak{D}$–régulières de D *sont celles qui sont régulières à droite et qui laissent chaque complexe* X_i *indivisible.*

Interprétation de la $\mathfrak{D}$–règularité en termes de morphisme.

Définition. – On appelle *morphisme* d'un hypertas $(E, \mathfrak{D})$ dans un hypertas $(E_1, \mathfrak{D}_1)$, la donnée d'une application f de E dans E_1 et d'un homomorphisme de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}_1$ tels que

$$\forall x \in E \quad , \quad \vartheta \in \mathfrak{D} \quad , \quad f(\vartheta(x)) = \varphi(\vartheta)(f(x)).$$

Une telle donnée est notée (f, φ).

Si f et φ sont surjectives, (f, φ) est dit surjectif.

PROPOSITION 2 (premier théorème d'isomorphisme).

a) *Soit* (f, φ) *un morphisme de* $(E, \mathfrak{D})$ *dans* $(E_1, \mathfrak{D}_1)$. *L'équivalence* ρ *définie sur* E *par* $x \rho y$ *si* $f(x) = f(y)$, *est* $\mathfrak{D}$*–régulière.*

b) *Soit* ρ *une équivalence* $\mathfrak{D}$*–régulière de* E. *On peut définir canoniquement un hypertas* $(E_1, \mathfrak{D}_1)$ *avec* $E_1 = E/\rho$, *et un morphisme* (f, φ) *de* $(E, \mathfrak{D})$ *sur* $(E_1, \mathfrak{D}_1)$, f *étant l'application canonique de* E *sur* E_1.

$(E_1, \mathfrak{D}_1)$ *est noté* $(E, \mathfrak{D})/\rho$.

3. – EQUIVALENCES PRINCIPALES.

Dans ce paragraphe et le suivant $(E, \mathfrak{D})$ est un hypertas fixé.

Résiduation. – A et B étant des complexes de E, on pose:

$$A \backslash_{\mathfrak{D}} B = \{\vartheta \in \mathfrak{D}, \vartheta(B) \cap A \neq \Phi\}.$$

Définition. – A étant un complexe de E, on appelle *équivalence principale associée à* A, la relation d'équivalence $\mathfrak{R}_A$ définie sur E par

$$x \mathfrak{R}_A y \Longleftrightarrow A \backslash_{\mathfrak{D}} x = A \backslash_{\mathfrak{D}} y.$$

Cette notion permet de retrouver certains résultats de P. Dubreil [2], R. Croisot [1] et de moi même [5], [6]. Donnons d'abord quelques définitions.

Définitions. – $(E, \mathfrak{D})$ est dit:

injectif si $\forall x, y \in E, \vartheta \in \mathfrak{D}, \vartheta(x) \cap \vartheta(y) \neq \Phi \Rightarrow x = y$;

transitif si $\forall x, y \in E, \exists \vartheta \in \mathfrak{D} : y \in \vartheta(x)$;

plein si $\forall x \in E, \vartheta \in \mathfrak{D}, \vartheta(x) \neq \Phi$.

Un complexe A de E est dit:

$\mathfrak{D}$*–fort* si $\forall x, y \in E, (A \backslash_{\mathfrak{D}} x) \cap (A \backslash_{\mathfrak{D}} y) \neq \Phi \Rightarrow A \backslash_{\mathfrak{D}} x = A \backslash_{\mathfrak{D}} y$;

$\mathfrak{D}$*–complet* si $\forall x \in E, \vartheta \in \mathfrak{D}, \vartheta(x) \cap A \neq \Phi \Rightarrow \vartheta(x) \subseteq A$;

$\mathfrak{D}$*–net* si $\forall x \in E, \exists \vartheta \in \mathfrak{D}, \vartheta(x) \cap A \neq \Phi$;

fortement $\mathfrak{D}$*–net* si $\forall x, y \in E, \exists \vartheta, \vartheta' \in \mathfrak{D} : \vartheta(x) \cap A \neq \Phi, \vartheta\vartheta'(y) \cap A \neq \Phi$.

Citons alors entre autres le

THÉORÈME 3. – *Soit* A *un complexe* $\mathfrak{D}$*–fort de* E:

a) $\mathfrak{R}_A$ *est une équivalence* $\mathfrak{D}$*–régulière;*

b) *si* A *est fortement* $\mathfrak{D}$*–net*, $(E, \mathfrak{D})/\mathfrak{R}_A$ *est transitif et injectif;*

c) *si* $(E, \mathfrak{D})$ *est plein et* A, $\mathfrak{D}$*–complet et fortement* $\mathfrak{D}$*–net*, $(E, \mathfrak{D})/\mathfrak{R}_A$ *est un tas injectif et transitif.*

4. – APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES HYPERTAS A L'ÉTUDE DES DEMIGROUPES STATIONNAIRES ET INVERSÉS.

Définition. – $(E, \mathfrak{D})$ est dit *stationnaire* si:

$$\forall \vartheta, \vartheta' \in \mathfrak{D} \quad , \quad x \in E \quad , \quad \vartheta(x) \cap \vartheta'(x) \neq \Phi \Rightarrow \vartheta = \vartheta'.$$

Une partie A de E est dite:

un $\mathfrak{D}$*–idéal* si $\forall \vartheta \in \mathfrak{D}, \vartheta(A) \subseteq A$;

$\mathfrak{D}$*–consistante* si $\forall \vartheta \in \mathfrak{D}, x \in E, \vartheta(x) \cap A \neq \Phi \Rightarrow x \in A$.

Il est clair qu'une partie A de E est $\mathfrak{D}$–consistante si et seulement si c'est un $\mathfrak{D}'$–idéal.

THÉORÈME 4. – *Si* $(E, \mathfrak{D})$ *est injectif, plein, stationnaire, les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *toute partie* $\mathfrak{D}$*–consistante est un* $\mathfrak{D}$*–idéal;*

b) *tout* $\mathfrak{D}$*–idéal est* $\mathfrak{D}$*–consistant;*

c) $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}'_r$;

d) $\mathfrak{D}$ *est un groupe d'elément neutre l'identité de* E;

e) $\mathfrak{F}_r \subseteq \mathfrak{F}_s$.

Lorsque ces conditions sont réalisées $(E, \mathfrak{D})$ *est un tas.*

En appliquant ce théorème à l'hypertas inverse $(E, \mathfrak{D}')$ on obtient le

THÉORÈME 5. – *Si* $(E, \mathfrak{D})$ *est un pseudo–tas stationnaire vérifiant la condition* $\forall \vartheta \in \mathfrak{D}, \vartheta(E) = E$, *alors les conditions* a), b), d) *du théorème précédent sont équivalents à la condition*

e′) $\mathfrak{F}'_r \subseteq \mathfrak{F}_s$.

On peut appliquer ces théorèmes aux demi–groupes. D est ici un demi-groupe fixé.

On peut énoncer un certain nombre de résultats. Le théorème suivant est du en partie à G. Thiérrin [9].

THÉORÈME. 6 – *Si* D *est simplifiable, les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *tout idéal à gauche est consistant à droite;*

b) *tout complexe consistant à droite est un idéal à gauche;*

c) *toute équivalence simplifiable à gauche est régulière à gauche;*

d) D *est un groupe;*

e) *toute équivalence régulière à gauche est simplifiable à gauche.*

D é f i n i t i o n s . – D est dit:

un groupe droit s'il est simplifiable à gauche, simple à droite;
inversé si $\forall x \in \mathrm{D}$, $\exists x' \in \mathrm{D}$: xx' ou $x'x$ est idempotent;
stationnaire à gauche si: $ax_1 = bx_1 \Rightarrow ax = bx \quad \forall x \in \mathrm{D}$.

THÉORÈME 7:

a) *si* D *est stationnaire à gauche et simplifiable à gauche, c'est un groupe droit si et seulement si une quelconque des conditions* a), b), c), e), *du théorème 6 est vèrifiée;*

b) *si* D *est stationnaire à gauche et simple à droite, c'est un groupe droit si et seulement si une quelconque des conditions* a), b), e) *du théorème 6 est vérifiée;*

c) *si* D *est stationnaire,* D *est inversé si et seulement si toute équivalence simplifiable à gauche est régulière à gauche.*

(La dernière partie de ce théorème est due à P. Lefèbvre [8].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. CROISOT, *Equivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe*, « J. Math. pures et appl. », 9e série, *36*, 373–417 (1957).

[2] P. DUBREIL, *Contribution à la théorie des demi-groupes*, « Mém. Acad. Sci. Inst. France », *63*, n° 3 (1941).

[3] P. GRILLET, *Sur la notion d'équivalence principale*, Séminaire Dubreil–Pisot, Algèbre et Théorie des nombres. Paris, n° 2 (1963–64).

[4] M. KOSKAS, « C. R. Acad. Sci. (Paris) », *256*, 4804 (1963).

[5] M. KOSKAS, « C. R. Acad. Sci. (Paris) », *256*, 5477 (1963).

[6] M. KOSKAS, « C. R. Acad. Sci. (Paris) », *257*, 334 (1963).

[7] M. KOSKAS, *Les hypertas*, Séminaire Dubreil–Pisot, Algèbre et Théorie des nombres Paris, *16*, 63, n° 10 (1962).

[8] P. LEFÈBVRE, *Sur certaines conditions minimales en thèorie des demi-groupes*, « Annali di Mat. », 4e série, *59*, 77–163 (1962) (Thèse. Soc. Math., Paris 1962).

[9] G. THIERRIN, *Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes*, « Bull. Soc. Math. France », *83*, 103–159 (1955) (Thèse. Soc. Math., Paris 1954).