
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ACHILLE BASSI

Sui polinomi in un algebra del Boole con topologia

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 40 (1966), n.1, p. 29–34.
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_1_29_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui polinomi in un'algebra del Boole con topologia.* Nota di ACHILLE BASSI presentata (*) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY.—A new mathematical entity is introduced: the polynomials in a Boolean Algebra with an operation of closure.

A definition of these polynomials is proposed, which largely generalizes that of the classical Boolean polynomials. A method for determining their canonical form is indicated and atomic properties of the Algebra of these polynomials are considered. Proofs will be given elsewhere.

1. In questa Nota presento nuovi enti che appartengono al campo dell'Algebra e della Topologia generale: i polinomi in una algebra del Boole dotata di un operatore di chiusura, il quale, come è noto, definisce in detta algebra una topologia.

Essi sono una vasta generalizzazione dei classici polinomi del Boole e costituiscono uno strumento di notevole potenza di analisi e insieme di sintesi.

In un lavoro che sarà prossimamente pubblicato mostro come, per mezzo di tale strumento, si possano riunire in un'unica formula tutte le dualità della Matematica (che siano corrispondenze tra proposizioni di una teoria o di teorie analoghe), e che tutte dipendono da un'unica causa. Ciò comprova la forza di sintesi di tali polinomi. In quello scritto mostro pure, come, per mezzo loro, si possono analizzare con precisione tali leggi di dualità, e chiarire ed eliminare alcune imperfezioni nell'enunciato di esse, provando così anche la forza di analisi di questo strumento.

Date le relazioni esistenti tra le Algebre del Boole con chiusura e alcune Logiche moderne (1), questi polinomi potranno dare allo studio di tali logiche un aiuto analogo a quello che i polinomi del Boole hanno dato alla Logica classica.

La teoria dei polinomi del Boole è stata finora studiata prevalentemente non da matematici e diretta specialmente a finalità applicative. E, forse per tale motivo, questa teoria matematica non ha raggiunto piena compiutezza, come appare chiaramente in due circostanze: nella definizione dei polinomi e nella determinazione della loro forma normale.

Nella costruzione della nuova teoria che espongo sui polinomi topologici, sono studiate tali due questioni e proposte soluzioni che, quando i polinomi topologici vengono a ridursi a polinomi del Boole, non coincidono con quelle usuali.

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1965.

(1) Vedi, per esempio, R. SIKORSKI, *Boolean Algebra*, Springer 1960, pp. 146-149.

In questa Nota espongo, riassumendo, le soluzioni proposte e i motivi che le giustificano.

E accenno alle proprietà atomiche di tali polinomi, molto singolari e atte a suscitare un vivo interesse ⁽²⁾.

2. Ritengo che nella definizione dei polinomi in un'algebra del Boole, dotata o no di topologia, sia opportuno abbandonare la limitazione ai soli polinomi « senza coefficienti », cioè con coefficienti costanti uguali a 0 o 1, sempre mantenuta per i classici polinomi del Boole in un'algebra senza topologia (il solo caso fino ad ora trattato).

Tale limitazione era dovuta al fatto di essersi questa teoria sviluppata specialmente in vista delle applicazioni alla Logica e all'Ingegneria elettronica, teorie nelle quali interessano solo questi particolari polinomi. Ma non vi è nessun motivo che impedisca a tali polinomi di possedere coefficienti costanti $\neq 0, 1$. Questa restrizione non aveva quindi una giustificazione matematica.

Inoltre la teoria dei polinomi con coefficienti qualsiasi si presenta più ricca e più completa. Adotteremo perciò quest'ultima ipotesi.

Ecco la nuova definizione.

Indichiamo, come di consueto, con $\cup$, $\cap$ e c le operazioni di *unione*, *intersezione* e *complementazione*, che soddisfano ai loro classici assiomi, e con a (iniziale della parola « aderenza ») quella di *chiusura*, che soddisfa agli assiomi del Kuratowski. Ciò premesso, si applichino a m costanti k_i ($i=1, 2, \dots, m$) e a n variabili X_j ($j=1, 2, \dots, n$) di un'algebra del Boole A , con topologia, queste operazioni, in un ordine arbitrario, ciascuna un numero finito di volte.

L'ente così ottenuto sarà detto *polinomio in una algebra del Boole con topologia e con coefficienti in A* , o più brevemente *polinomio topologico con coefficienti in A* .

È necessario supporre, come già si suppone nel caso dei polinomi del Boole, che le variabili X_j siano elementi di un'algebra libera (*free algebra*), e cioè non siano vincolate da nessuna relazione oltre a quelle che sono conseguenze degli assiomi delle operazioni dell'algebra.

Questi polinomi, quando siano applicate ad essi le operazioni dell'algebra, costituiscono gli elementi di una nuova algebra del Boole con topologia, che potremo indicare con $P(X_i, A)$.

Possiamo per altro limitarci a considerare semplicemente polinomi con coefficienti in una sottoalgebra A' di A . Questi formano una sottoalgebra $P(X_i, A')$ della precedente.

Tra le algebre del Boole ve n'è una minima, costituita dai soli elementi 0 e 1, che è contenuta come sottoalgebra in tutte le altre. La indicheremo con A_0 .

(2) Altre notizie su queste proprietà atomiche e una descrizione succinta delle applicazioni di questi enti alla dualità, sono esposte in una conferenza che sarà prossimamente pubblicata negli *Atti del Simposio di Geometria Algebrica in onore del prof. Guido Castelnuovo* (Roma 1965).

I polinomi classici del Boole sono ottenuti quando, nella predetta definizione, non si fa uso dell'operazione topologica a e quando l'algebra dei coefficienti si riduce all'algebra minima A_0 . Perciò essi si inquadrano perfettamente come caso particolare di quelli qui considerati.

La definizione proposta risulta del tutto in armonia con i concetti dell'Algebra moderna.

3. Come nel caso dei polinomi classici del Boole, le proprietà dei polinomi topologici che più interessano sono quelle della funzione che essi rappresentano, comuni a tutti i polinomi funzionalmente identici tra loro.

Si può supporre che la totalità di questi enti sia suddivisa in classi di polinomi tra loro funzionalmente identici. Un problema fondamentale sorge allora: quello di determinare in ciascuna classe un elemento unico, particolarmente semplice, da considerarsi come *forma normale o canonica* di ogni altro polinomio di quella classe.

Il fatto che due polinomi abbiano la stessa forma normale fornisce la condizione necessaria e sufficiente affinché essi siano funzionalmente identici.

Il problema, ovvio per l'algebra classica, di determinare la forma normale di un polinomio, è qui più complesso, data la grande differenza tra gli assiomi delle due algebre.

Nel caso dei polinomi del Boole, il problema è svolto in due fasi.

Si riduce dapprima, con metodi elementari, il polinomio del Boole a *unione di un numero finito di monomi*, cioè di espressioni del tipo

$$(1) \quad X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

in cui *non interviene l'operatore $\cup$* . In esse, come nelle espressioni (2) e (3) che consideriamo in seguito, le X possono essere sostituite, tutte o in parte, da cX . Chiameremo *forma ridotta* l'espressione ottenuta.

Questa forma ridotta per altro non è unica, e vari Autori si sono preoccupati di determinare, tra le forme ridotte di un polinomio del Boole, quelle in cui si verificassero ulteriori proprietà di minimo, che interessassero per i loro fini ⁽³⁾. Ma queste ricerche non conducono a una soluzione unica, e le soluzioni proposte corrispondono a condizioni *sufficienti*, ma *non necessarie*, per l'identità funzionale dei polinomi.

Tuttavia, attraverso ad una modificazione del processo, si può giungere ad una forma canonica unica, che fornisce la condizione necessaria e sufficiente cercata.

Il procedimento è condotto con il metodo dei *tests*.

Dato un polinomio P , si considerino tutte le variabili X_i (o cX_i) che risultano incluse in P , e sia Q_0 la loro unione. Indi si considerano le espressioni di tipo

$$(2) \quad X_i \cap X_j$$

(3) Vedi, per esempio, M. CARVALLO, *Monographie des Treillis et Algèbres de Boole*, Gauthier-Villars 1962, pp. 69-76, ove sono riportati i metodi del Quine e del Mott.

che siano incluse in P e non siano incluse in Q_0 . È necessario considerare l'unione di *tutte* queste espressioni, che indicheremo con Q_1 .

Il processo diverge da quello degli altri Autori i quali si preoccupano di eliminare, fra le espressioni, $X_i \cap X_j$, anche quelle che eventualmente siano incluse nell'unione di Q_0 con i *restanti monomi* (2). Procedendo in questo modo, si può ridurre ulteriormente il numero dei monomi (2) da includersi nel polinomio finale. Si perde, in tale maniera, l'unicità del risultato, perché, come mostrano opportuni esempi, questa ulteriore riduzione può essere fatta in diversi modi.

Ma, se dal punto di vista matematico, il fatto di ottenere un risultato unico, che fornisca la condizione necessaria e sufficiente per l'identità funzionale, appare importante, non così è per determinati fini applicativi.

Determinato, nel modo detto, Q_0 e Q_1 , consideriamo i monomi di tipo

$$(3) \quad X_i \cap X_j \cap X_h$$

che siano inclusi in P e non lo siano nell'unione $Q_0 \cup Q_1$. Indichiamo con Q_2 l'unione di *tutti* questi monomi. Analogamente, determineremo l'unione Q_3 di *tutti* i monomi di tipo $X_i \cap X_j \cap X_h \cap X_k$, che siano inclusi in P e non lo siano nell'unione $Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2$. E così di seguito. Il processo terminerà quando si sarà giunti a considerare l'unione Q_{n-1} dei monomi (1) con n variabili differenti; ed eventualmente potrà terminare anche prima se questa ultima unione e alcune di quelle che immediatamente la precedono, risultassero uguali a zero. L'unione

$$Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{n-1}$$

è la forma normale cercata. Notisi che alcuni degli Q_i possono mancare, senza che la validità del procedimento venga compromessa.

Il processo si può estendere ai polinomi del Boole con coefficienti in un'algebra A .

Nella teoria dei polinomi topologici, la determinazione della loro forma normale presenta maggiore complessità.

In tale teoria si può definire *monomio topologico*, un polinomio in cui intervengano solamente gli operatori c e a . Ma, affinché la definizione abbia senso, si deve sottoporre l'espressione ad un trattamento previo, atto a rendere la definizione non illusoria. Omettiamo qui, per brevità, la descrizione di esso. Si può concludere, come nel caso dell'algebra classica e dei polinomi del Boole, che ogni *polinomio* è l'unione di un numero finito di monomi.

L'espressione ottenuta sarà detta ancora *forma ridotta* del polinomio. Essa è ottenuta con trasformazioni sul polinomio, senza fare uso del metodo dei *tests*.

Il procedimento per ottenere, infine, la forma normale, consiste essenzialmente nell'istituire un *ordine totale* tra classi di monomi analoghi, di complessità crescente. Ciascuna classe è costituita di *tutti* i monomi di un determinato tipo, ciascuno dei quali è incluso nel polinomio P considerato e non è incluso nell'unione dei monomi delle classi che precedono quella del monomio considerato. Le regole di ordinamento di queste classi di monomi, sono complesse,

ma esaurienti; e il processo conduce alla determinazione di una forma normale *unica*.

Anche qui, per evitare l'inconveniente già segnalato per il caso dei polinomi del Boole, di perdere l'unicità di risultato, *non* si elimineranno i monomi che risultano inclusi *solo* nell'unione dei monomi delle classi precedenti a quella del monomio considerato e dei restanti della sua stessa classe.

Il metodo ha un valore prevalentemente teorico, perché i *tests* atti a verificare le inclusioni sopra riferite possono essere molto numerosi, e ciascuno può essere assai laborioso.

Tuttavia, con questo metodo, si dimostra l'esistenza di una ben determinata forma canonica e si indica come costruirla.

4. Per studiare le proprietà atomiche dei polinomi topologici, è necessario introdurre il concetto di *grado topologico*.

Esso può definirsi così:

data una variabile X di un polinomio, si consideri l'insieme di tutti gli operatori di questo che contengano tale variabile nel loro argomento. Si vede subito che questo insieme è una successione. Si consideri il numero delle volte in cui, in questa successione, interviene l'operatore topologico α .

Questo numero sarà detto grado topologico della X nel polinomio. Sarebbe naturale definire come grado topologico del polinomio il grado massimo delle sue variabili. Questo carattere, per altro, può variare tra polinomi funzionalmente identici.

Chiameremo *grado topologico* di un polinomio il valore *minimo* che questo carattere assume nella classe dei polinomi funzionalmente identici a quello considerato.

Avremo così polinomi di grado topologico 0, 1, 2 ecc.

Quelli di grado zero e con coefficienti in A_0 coincidono con i polinomi classici del Boole.

Veniamo ora a un rapido cenno sulle proprietà atomiche dei polinomi topologici.

Quando l'algebra A dei coefficienti è atomica, risulta atomica anche quella dei polinomi, e quando la prima ha un numero finito di atomi, anche la seconda ha atomi in numero finito. È questo il caso dei polinomi con coefficienti in A_0 , dato che A_0 ha un solo atomo, l'1.

Limitiamoci qui a considerare questo caso, poiché esso già presenta i caratteri essenziali della situazione generale.

Gli atomi dei polinomi si suddividono in due categorie: una di atomi che sono tali per i polinomi di qualsiasi grado topologico, l'altra di atomi che sono tali solo per i polinomi di grado k , che chiameremo k -atomi.

Un k -atomo si spezza in un numero fisso di $(k+1)$ -atomi.

Gli atomi della prima categoria sono 2^n . I k -atomi sono molto più numerosi e crescono di numero rapidissimamente col crescere del grado, poiché l'ordine di grandezza del numero dei k -atomi è quello del logaritmo del numero dei $(k+1)$ -atomi.

Per valori anche piccoli di k e di n , il numero degli atomi di tali polinomi diviene così vertiginosamente grande, da appartenere alla categoria dei numeri cosiddetti « inaccessibili », introdotti nella Scienza dal Borel ⁽⁴⁾. Questi numeri definiti inaccessibili hanno quindi un'applicazione concreta in tali questioni di atomicità.

Questo cenno rapido mostra come la teoria dei polinomi topologici costituisca, di per se stessa e per le sue applicazioni, un campo di ricerche vasto e attraente.

(4) E. BOREL, *Les Nombres Inaccessibles*, Gauthier-Villars, 1952. Vedi Capitolo I, pp. 1-14 (Les nombres relativement inaccessibles).