Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vittorio Togliatti

Alcuni esempi di funzioni di distribuzione di età apparenti di minerali dovute ad eventi perturbatori

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.6, p. 519–525.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_6_519_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Geochimica. — *Alcuni esempi di funzioni di distribuzione di età apparenti di minerali dovute ad eventi perturbatori.* Nota di VITTORIO TOGLIATTI, presentata (*) dal Socio E. ONORATO.

Il passaggio di particelle cariche pesanti provoca in molti minerali un danno permanente del reticolo cristallino.

I lavori di Silk e Barnes (1959), Bonfiglioli et al. (1961), Fleisher, Price e Walker (1962 e sgg.) hanno dimostrato in particolare come esista in molti minerali un background di tracce fossili dovuto principalmente alla fissione spontanea dell'U^{238}, e come il tempo di fading spontaneo di queste tracce sia $\gg$ di 10^9 anni.

Queste scoperte, insieme con il metodo di rivelazione chimica delle tracce di danneggiamento, hanno aperto nuove possibilità, anche per quanto riguarda la datazione di minerali e rocce.

Numerosi minerali si prestano ad essere datati col metodo del conteggio delle fissioni fossili di U^{238} e tra questi particolarmente le miche. I dati di età ottenuti concordano spesso con quelli ottenuti per altra via; talvolta però le età indicate da minerali paragenetici, o da diversi campioni dello stesso minerale, presentano una dispersione superiore a quella statistica che sembrerebbe indicare una banda di età, piuttosto che un unico evento.

Questo caso è stato osservato dall'autore a proposito di alcuni campioni di muscovite pegmatitica provenienti dalla Rhodesia.

Le età calcolate con il metodo delle fissioni fossili di U^{238} in vari campioni della stessa muscovite, mostravano una dispersione molto superiore all'errore statistico, e si distribuivano in modo da indicare una banda di età.

La variabilità delle età calcolabili con questo metodo in alcuni casi non è giustificabile sulla base delle correzioni (Togliatti 1965 *a*, *b*, *c*), che si devono portare, dovute ai fattori d'efficienza nella rivelazione delle fissioni fossili.

Una interpretazione di queste discordanze può essere la seguente.

Si può pensare che degli eventi perturbatori possano modificare minerali paragenetici in modo tale che le età calcolate non siano più legate solo all'età della paragenesi, ma anche alla distribuzione nel tempo degli eventi perturbatori stessi.

Nel caso delle miche, ad esempio, un apporto di calore provoca il fading delle tracce di fissione fossile. Questo non è lineare né col tempo di riscaldamento, né con la temperatura raggiunta dal minerale.

Inoltre un apporto di soluzioni contenenti Uranio, può far variare la concentrazione di questo per unità di volume di ogni minerale (quest'ipotesi è plausibile nel caso di minerali facilmente sfaldabili come le miche) e provo-

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1965.

care un ringiovanimento dell'età che non deve essere necessariamente uguale per ogni minerale o parte di esso.

Si pone quindi il problema di interpretare le età ricavate. Ci si può chiedere quali dei valori ricavati sia significativo per la data della paragenesi minerale, e se sia possibile ricavare dalle distribuzioni di età osservate delle informazioni sulla modalità e sulla distribuzione nel tempo degli eventi perturbatori.

È possibile introdurre una schematizzazione che può far rendere conto di come le età apparenti ricavate possano non indicare un unico evento, ma piuttosto una distribuzione continua di eventi temporali, anche nel caso che gli eventi perturbatori che si sono sovrapposti a quello (unico) iniziale, costituiscano un insieme discreto.

Consideriamo il caso generale di un insieme di minerali di varia età: ciascun minerale, o parte di esso, costituisce un indicatore di tempo.

Se gli eventi perturbatori sono del tipo di quelli descritti, per ogni aumento di temperatura, o variazione della concentrazione di Uranio, non si avranno variazioni di età apparenti proporzionali, poiché non sono proporzionali al tempo né gli effetti del fading dovuto ad un riscaldamento, né la quantità di atomi di U^{238} che si fissionano spontaneamente.

È possibile però superare questa difficoltà considerando semplicemente che ogni effetto dovuto ad una perturbazione equivalga a far variare il tempo segnato da ciascun indicatore.

Sia $F(t, x)\,dt$ il numero degli indicatori che segnano un tempo compreso tra t e $t + dt$ all'istante x.

Nel caso che non vi siano eventi che perturbino il comportamento degli indicatori una volta che siano stati caricati su di un istante iniziale, sarà: $F(t, x + dx) = F(t - dx, x)$; infatti gli indicatori che segnano t al tempo $x + dx$ sono tutti e soli quelli che segnavano $t - dx$ al tempo x. (Qui si suppone che sia uniforne la marcia di ciascun indicatore).

Sarà perciò:

$$\frac{F(t, x + dx)}{dx} = -\frac{F(t - dx, x)}{-dx}\text{; da cui passando al limite per } dx \to 0\text{:}$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Ciò vuol dire che $F(t, x)$ è funzione dell'argomento $t - x$, onde si avrà:

$$F(t, x) = F(t + k, x + k) \quad \text{per } k \text{ qualsiasi.}$$

Se allora si pone: $F_0(t) = F(t, 0)$ sarà: $F(t, x) = F(t - x, 0) = F_0(t - x)$ la soluzione dell'equazione (1). In altri termini ogni indicatore che segna t al tempo $x = 0$ segnerà $t + x$ ad tempo x; od ancora si avrà che, in assenza di cause perturbatrici, tutti gli indicatori segneranno in un intervallo di tempo qualsiasi, un medesimo incremento di tempo.

Supponiamo ora che gli indicatori, il numero complessivo dei quali si suppone costante, possano essere portati a segnare un tempo qualsiasi, e supponiamo che questa operazione avvenga per ciascun indicatore, con una probabilità costante λ per unità di tempo. Il numero totale di indicatori perturbati nel tempo dx è dato da $\alpha\lambda\, dx$, dove α si può porre sotto la forma

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, x)\, dt.$$

Indichiamo con $\varphi(t, t^*, x)\, dt$ la probabilità, sempre per unità di tempo, che un indicatore, che segnava t^*, ha di essere portato a segnare un tempo compreso nell'intervallo tra t e $t + dt$. La funzione φ rappresenta una densità di probabilità; l'integrale della φ, esteso da $-\infty$ a $+\infty$, sarà perciò uguale a 1.

Calcoliamo ora il numero totale di indicatori ricaricati nel tempo dx a segnare t; questo numero è:

$$\lambda dt\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, t^*, x)\, F(t^*, x)\, dt^* = \lambda dt\, dx \cdot \Phi(t, x). \tag{2}$$

Infatti, per calcolare il numero di indicatori che segnano t al tempo $x + dx$ occorrerà sommare al numero di quelli che già segnavano $t - dx$ al tempo x, che non sono stati perturbati durante il tempo dx, il numero sopra determinato di quelli che sono stati spostati a segnare t nel tempo dx.

Dunque:

$$F(t, x + dx)\, dt = F(t - dx, x)\, dt - \lambda dx\, F(t - dx, x)\, dt + \lambda dt\, dx\, \Phi.$$

Dividendo per dt, poi per dx, e successivamente passando al limite per $dx \to 0$, si ottiene:

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -\lambda F(t, x) + \lambda\Phi. \tag{3}$$

Si può supporre anche che $\varphi(t, t^*, x)$ sia indipendente da t^* e x. Questa ipotesi è lecita perché vuol dire supporre che ogni evento metamorfico o perturbatore dipenda da cause geologiche indipendenti dall'età dei minerali. In altre parole questo comporta che le perturbazioni avvengano indifferentemente per minerali di età diversa nella stessa zona, o per minerali paragenetici già perturbati in modo diverso. La probabilità di ricarica sarà solo funzione del tempo t che gli indicatori saranno portati a segnare.

Da questa schematizzazione restano esclusi perciò fenomeni come il fading naturale delle tracce di fissione che possano anche essere interpretati come processi di ricarica di indicatori di tempo, ma sono evidentemente funzione dell'età dei minerali, cioè di x e di t^*.

Dalla (2) si ricava allora:

$$\lambda\Phi(t, x)\, dt\, dx = \lambda dt\, dx\, \varphi(t) \int_{-\infty}^{+\infty} F(t^*, x)\, dt^* = \lambda dt\, dx\, \varphi(t) \cdot \alpha\,;$$

e quindi $\Phi(t, x)$ sarà: $\Phi(t, x) = \alpha\varphi(t)$; ed una soluzione della (3), qualora si ponga $F(t, 0) = F_0(t)$, sarà:

$$F(t, x) = F_0(t - x)\, e^{-\lambda x} + \lambda\alpha\, e^{-\lambda t} \int_{t-x}^{t} e^{\lambda\xi}\, \varphi(\xi)\, d\xi .$$

Nel caso che la perturbazione consista in un azzeramento degli indicatori – ad esempio nel caso che si abbia un completo riassetto del reticolo cristallino dovuto ad un rialzo termico che provochi il fading di tutte le tracce di fissione avvenute sino all'istante $x = k$ – sarà:

$$\varphi(t) = \delta(t) \qquad \text{(funzione } \delta \text{ di Dirac)}.$$

In tal caso

$$\int_{t-x}^{t} e^{\lambda\xi}\, \varphi(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 1 & \text{se } t - x \leq 0 \leq t \\ 0 & \text{se l'intervallo } (t - x, t) \\ & \text{non contiene l'origine} \end{cases}$$

e quindi

$$F(t, x) = F_0(t - x)\, e^{-\lambda x} + \lambda\alpha\, e^{-\lambda t} \chi_0^x(t) \tag{4}$$

dove $\chi_0^x(t)$ è una funzione gradino così definita:

$$\chi_0^x(t) \begin{cases} = 1 & \text{per ogni } t \in (0, x) \\ = 0 & \text{per } t \text{ fuori di } (0, x) . \end{cases}$$

Se poi tutti gli indicatori segnavano lo stesso tempo, uguale a zero per $x = 0$, allora:

$$F_0(t) = \alpha \cdot \delta(t) \quad ; \quad \varphi(t) = \delta(t) ; \tag{5}$$

$$F(t, x) = \alpha\, \delta(t - x)\, e^{-\lambda x} + \alpha\lambda\, e^{-\lambda t} \quad \text{con} \begin{cases} 0 \leq t \leq x \\ t = 0 \quad \text{altrove} . \end{cases}$$

Questo è ovviamente il caso di minerali paragenetici. In fig. 1 è riportata la distribuzione di $F(t)$ nel caso che sia:

$$F_0(t) = \alpha\, \delta(t) \quad \text{e} \quad \varphi(t) = \delta(t) .$$

per valori di x che vanno da 0 a ∞. Per λ è stato assunto il valore $\lambda = 10\ (\text{eon})^{-1}$. Si nota come la distribuzione iniziale subisca una traslazione nel tempo e sia diminuita in ampiezza di un fattore $e^{-\lambda t}$. Nell'intervallo $0 \leq t \leq x$ vi è anche un contributo dovuto ad uno stato stazionario. Al tendere di $x \to \infty$ è:

$$\lim_{x \to +\infty} F(t) = F_\infty(t)\, \lambda\alpha\, e^{-\lambda t} \qquad \text{per ogni} \quad t \geq 0$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} F(t) = F_\infty(t) = 0 \qquad \text{per} \quad t < 0 .$$

Si realizza cioè col passare del tempo una situazione stazionaria per F (t); al limite la distribuzione che si può osservare negli indicatori dipende solo da λ e da t: cioè dalla frequenza degli eventi perturbatori. Nel caso stazionario si ha quindi una distribuzione che consiste in un ramo di esponenziale che trasla nel tempo senza mutare forma, questo sempre nell'ipotesi che rimanga costante la frequenza degli eventi di ricarica. Si realizza cioè una distribuzione di età apparenti, funzione di t, che non fornisce più alcuna informazione su x (cioè in definitiva sull'età vera dei minerali).

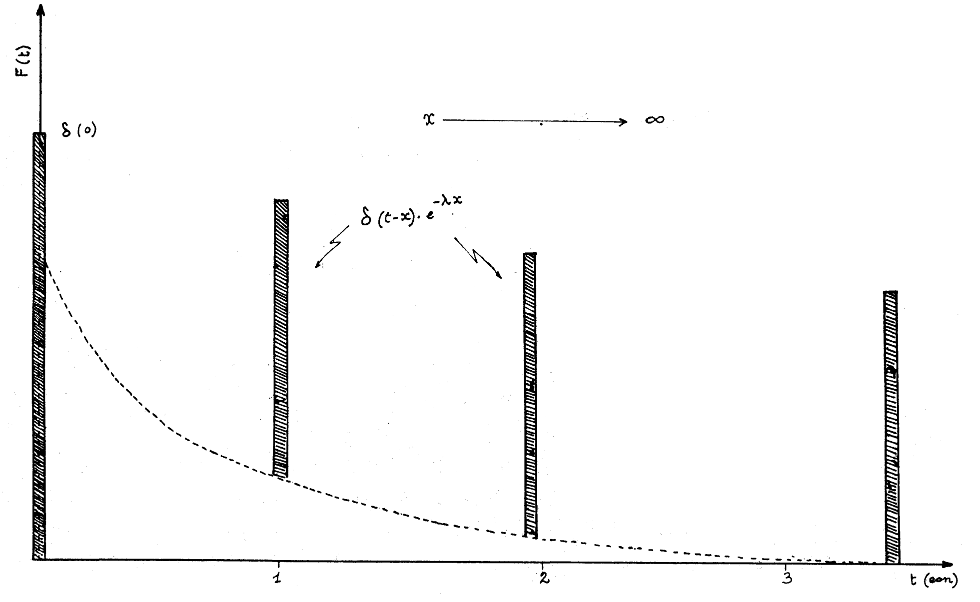

Fig. 1.

Come prima conclusione si può osservare che la conoscenza della distribuzione dei valori di età forniti dagli indicatori non permette di risalire alla forma della funzione φ. Questo significa che la distribuzione dell'età osservata in minerali paragenetici, o in diverse parti dello stesso minerale, non fornisce dirette indicazioni sulla distribuzione nel tempo degli eventi perturbatori che si sono sovrapposti all'evento iniziale. Non è detto cioè, che se si osserva una banda di età, l'età più grande osservata sia quella della paragenesi; ogni età osservata sarà solamente correlabile con un evento perturbatore. È possibile concludere però che una frequenza maggiore di indicatori che segna età giovani, non dipende da una accelerazione del meccanismo di perturbazione, ma solo dalla continua e costante ricarica degli indicatori su età più giovani.

La probabilità di trovare un'età corrispondente a quella della paragenesi originale diminuisce al crescere di x, cioè col passare del tempo. Questo risultato è importante per minerali di rocce di età precambrica. In questo caso mancano infatti le informazioni geologiche sul numero e sulla distribuzione degli eventi metamorfici che si sono succeduti.

Ad esempio la probabilità di riperire un indicatore che segni un tempo h, $0 < h \leq x$ è (vedi equazione (4)) $e^{-\lambda t}$; se assumiamo per λ il valore $10 \cdot (\text{eon})^{-1}$ e per h il valore di $3 \cdot 10^9$ anni risulta che, nelle ipotesi fatte, la probabilità $p(h)$ di riperire un indicatore che segni un tempo $h > 3 \cdot 10^9$ anni è dell'ordine di 10^{-6}.

È interessante considerare un caso analogo al precedente ponendo però come ulteriore condizione che sia $\lambda = 0$ per ogni $x \geq k$, il che equivale a supporre che, da un certo istante in poi, nella vita di un minerale non siano intervenuti ulteriori eventi perturbatori. La distribuzione che risulta in questo caso presenta due picchi, il primo in corrispondenza di $t = x$, il secondo in corrispondenza di $t = x - k$. Il primo rappresenta un evento iniziale, il secondo non rappresenta un addensamento delle perturbazioni ma è da mettersi in relazione al momento in cui queste sono venute a cessare. Come conseguenza di una continua e stazionaria ricarica a 0 degli indicatori durante l'intervallo di tempo $0 \,\overline{\quad}\, k$, si ha quindi una banda di età che rappresenta l'intervallo di tempo durante il quale si sono successi gli eventi perturbatori. Ciò significa che se anche non si possono trarre informazioni sulla distribuzione nel tempo di tali eventi, questi potranno però esser localizzati in base ai dati di età in un intervallo di tempo limitato.

Se poi supponiamo che per ogni $x \geq k$ sia: $\lambda = \lambda_0 + k\delta(x - k)$, cioè che un grande numero di indicatori venga azzerato per $x = k$, la distribuzione di età che si ottiene differisce da quella ottenuta nel caso $\lambda = 0$ per $x \geq k$, in quanto in corrispondenza del picco presentato dalla $\mathrm{F}(t)$ per $t = x - k$ si avrà una coda verso le età più antiche. Ciò significa che quando una serie discreta di eventi metamorfici, fortemente accentrati nel tempo, si sovrappone ad una precedente serie di eventi, distribuiti casualmente, il ricordo degli eventi precedenti provoca la comparsa di una coda nella distribuzione di $\mathrm{F}(t)$.

Si possono fare alcune considerazioni:

1) Episodi perturbatori che costituiscono una sequenza discreta provocheranno dei picchi o delle bande nelle distribuzioni di età osservate in minerali paragenetici, se la durata dell'episodio è maggiore dell'errore sperimentale del metodo usato per datare. Una serie di eventi di disturbo distribuita nel tempo con una certa legge ha come conseguenza lo spettro di distribuzione dell'età sopra discusso.

2) Le probabilità di reperire età corrispondenti agli eventi metamorfici più vecchi, e alla età delle paragenesi è funzione della costante di tempo dei processi di disturbo. Il confronto con le età ricavate con altri metodi di datazione, non solo aumenta la probabilità di reperire i più antichi eventi, ma permette di interpretare le distribuzioni delle età osservate in termini di localizzazioni temporali di eventi perturbatori.

3) Al limite può verificarsi una distribuzione stazionaria della età. In questo caso la frequenza maggiore di età giovani non va interpretata come dovuta ad un aumento nella frequenza dei processi metamorfici subiti dai minerali. Nel caso stazionario la distribuzione di età non varia nel tempo

per cui quando un sistema differisce dallo stato stazionario per quantità così piccole da risultare indeterminabili, le età rivelate non danno alcuna informazione sull'età effettiva del sistema, ma solo su quella degli ultimi eventi perturbatori. Questo è vero naturalmente quando la scala del tempo è molto grande rispetto alla costante di tempo degli eventi perturbatori: in ogni caso, le informazioni più sicure si hanno per le età più giovani.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BONFIGLIOLI G., FERRO A., MOJONI A., « J. applied phys. », *32*, 2499 (1961).
[2] MAURETTE M., PELLAS P., WALKER R. M., « Bull. soc. mineral. Crist. », *87*, 6 (1964).
[3] PRICE P. B., WALKER R. M., « J. applied. phys. », *33*, 3407 (1962).
[4] SILK E. C. H., BARNES R. S., « Phil. mag. », L, 970 (1959).
[5] TOGLIATTI V., « Boll. geof. teor. appl. », *27* (1965 *a*); IDEM, ibid. (1965 *b*) (in corso di stampa); IDEM, « Rend. ist. lomb. » (1965 *c*) (in corso di stampa).
[6] WALKER R. M., PRICE P. B., FLEISHER R. L., « Applied phys. letters », *32*, 38 (1963).

SUMMARY. — It happens that some samples of paragenetic micas show ages, measured by the fossil fission tracks method, which are distributed in time bands. A model is presented which considers the possibility that metamorphic events, with different distribution functions in time, can modify the characteristics of paragenetic minerals. Distribution functions of ages are obtained, under various hypothesis. It is demonstrated that the probability of obtaining the true age of a mineral decreases with time. Methamorphic events of finite duration cause the appearance of time bands. The influence of previous events produces a tail in the distribution of ages in paragenetic minerals. In the limit, distribution function of ages reaches a steady state condition, and cannot furnish information on the age of the minerals. The higher frequency of young ages seems to be not dependent on a higher frequency of methamorphic events but rather to be an effect of the hypothesized distribution function.