Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silviu Guiaşu

Sur la Mécanique statistique pour les systémes non-conservatifs

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.6, p. 447–451.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_6_447_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Meccanica statistica. — *Sur la Mécanique statistique pour les systèmes non-conservatifs*. Nota di SILVIU GUIAŞU, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

Hommage à M. le Professeur MAURO PICONE à l'occasion de son 80e anniversaire.

1. Les systèmes à double structure ont été élucidés par O. Onicescu [1], [2].

Soit maintenant $\mathcal{S}$ un système mécanique non-conservatifs, avec liaisons holonomes. Le mouvement est donné par les équations [3], [4],

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, s) \tag{1}$$

où $q_1, q_2, \cdots, q_s$ sont les coordonnées généralisées, T l'énergie cinétique, et $Q_1, Q_2, \cdots, Q_s$ les composantes généralisées de la force dans l'espace des configurations. Soient maintenant

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, s) \tag{2}$$

et la fonction

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - T$$

En calculant les dérivées partielles de la fonction $\mathcal{H}$ par rapport à p_k, respectivement à q_k, et en tenant compte de (1) et (2) nous obtenons le système des équations quasi-canoniques

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \quad ; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} + Q_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, s) \tag{3}$$

2. Le courant attaché au système des équations (3) jouit les propriétés suivantes:

THÉORÈME: *Si dans l'espace des phases Γ, l'on considere chaque point du domaine $D_0 \subset \Gamma$, de volume V_0, comme l'état initial du système au moment t_0 et si l'on suit le déplacement de ces points dans le temps, le long de leurs trajectoires jusqu'à un certain moment final t, alors la totalité des positions réalisées à ce moment forment un domaine D_t dont le volume V_t est donné par la relation*

$$V_t = \int_{D_0} e^{\sum_{k=1}^{s} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial Q_k}{\partial p_k} du} \, dq_0 \, dp_0 . \tag{4}$$

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1965.

Démonstration: Soit

$$q = q\,(q_0\,,\,p_0\,,\,t_0\,,\,t) \quad , \quad p = p\,(q_0\,,\,p_0\,,\,t_0\,,\,t)$$

la solution du système (3) et soit Δ le détermination fonctionnel de cette transformation au moment t. Alors

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_k}{\partial p_k}\,.$$

Pour $t = t_0$ la transformation est identique, donc $\Delta_0 = 1$, et donc nous avons pour le volume V_t la formule (4).

3. Comme conséquence du théorème précédant nous avons une relation bien déterminée entre la densité de probabilité dans le point $(q_0\,,\,p_0)$ au moment t_0 et la densité de probabilité dans le point $(q = q\,(q_0\,,\,p_0\,,\,t_0\,,\,t)\,,$ $p = p\,(q_0\,,\,p_0\,,\,t_0\,,\,t))$ au moment t:

$$\rho_t\,(q\,(q_0\,,\,p_0\,,\,t_0\,,\,t)\,,\,p\,(q_0\,,\,p_0\,,\,t_0\,,\,t)) = \rho_{t_0}\,(q_0\,,\,p_0)\,e^{-\sum\limits_{k=1}^{s}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial Q_k}{\partial p_k}du} \tag{5}$$

Cette relation résulte de la conservation de la probabilité

$$\int\limits_{D_t} \rho_t\,(q\,,\,p)\,dq\,dp = \int\limits_{D_0} \rho_{t_0}\,(q_0\,,\,p_0)\,dq_0\,dp_0 \tag{6}$$

parce que grâce au courant, tous les points du domaine D_0 au moment t_0, vont au domaine D_t au moment t et donc la probabilité que le point representatif du système se trouve au moment t_0 dans le domaine D_0 est egale à la probabilité que le point representatif du système se trouve au moment t dans le domaine D_t. Mais puisque

$$\int\limits_{D_t} \rho_t\,(q\,,\,p)\,dq\,dp = \int\limits_{D_0} \rho_t\,(q\,(q_0\,,\,p_0\,,\,t_0\,,\,t)\,,\,p\,(q_0\,,\,p_0\,,\,t_0\,,\,t))\,\Delta\,dq_0\,dp_0 \tag{7}$$

il resulte de (6), (7) et (4) la formule (5).

4. La formule (5) nous donne la loi d'évolution de la densité de probabilité à condition de connaître la densité de probabilité au moment initial t_0. Pour la déterminer, nous ferons l'application du principe de l'entropie maximale de E.T. Jaynes [5]. Si nous connaissons les valeurs moyennes $\langle f_i \rangle_{t_0}$ $(i = 1\,,\,2\,,\cdots,\,n)$ de n fonctions de phase f_i $(i = 1\,,\,2\,,\cdots,\,n)$ au moment t_0, alors, par l'application de ce principe nous obtenons pour la densité de probabilité au moment t_0 l'expression

$$\rho_{t_0}\,(q_0\,,\,p_0) = e^{-\beta - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(q_0, p_0, t_0)} \tag{8}$$

où les constantes $\beta , \alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_n$ seront déterminées par les égalités

$$\beta = \log \Phi_{t_0} (\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_n)$$

$$\langle f_i \rangle_{t_0} = - \frac{\partial \log \Phi_{t_0} (\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_n)}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1 , 2 , \cdots , n)$$

où nous avons posé

$$\Phi_{t_0} (\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_n) = - \int\limits_{\Gamma} e^{- \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i (q_0 , p_0 , t_0)} dq_0 \, dp_0 .$$

L'expression (8) compléte la formule (5) pour la densité de probabilité au moment t.

5. Le processus correspondant au courant de l'espace des phases, tenant compte de considérations précédantes est encore un processus déterministe; aléatoires sont seulement les conditions initiales. La probabilité de passage du point (q_0 , p_0) au moment t_0 au point (q , p) arbitraire, au moment $t \; (t > t_0)$ sera

$$\rho_{t_0 , t} (q_0 , p_0 ; q , p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad q = q (q_0 , p_0 , t_0 , t) \quad , \quad p = p (q_0 , p_0 , t_0 , t) \\ 0 & \text{si} \quad q \neq q (q_0 , p_0 , t_0 , t) \quad \text{ou} \quad p \neq p (q_0 , p_0 , t_0 , t) \end{cases}$$

où $q (q_0 , p_0 , t_0 , t)$, $p (q_0 , p_0 , t_0 , t)$ est la solution du système des équations quasi–canoniques (3), avec les conditions initiales (q_0 , p_0) au moment t_0 .

6. La Thérmodynamique des processus irréversibles s'occupe des lois phénoménologiques qui gouvernent le comportement des systèmes macroscopiques en évolution et la Mécanique statistique des processus irréversibles essaye d'expliquer ces lois, comme une conséquence de la Mécanique microstructurale. Les grandeurs macroscopiques sont assimilées aux valeurs moyennes de certaines variables aléatoires, fonctions de phase attachées aux système. Si nous avons m variables macroscopiques

$$\langle f_r \rangle_t = \int\limits_{\Gamma} f_r \, \rho_t \, dv \qquad (r = 1 , 2 , \cdots , m)$$

où nous avons noté, pour simplifier l'écriture, avec dv l'élément de volume dans Γ, leur variation en fonction de temps, grâce à la relation (5) sera donné par les équations

$$\text{(9)} \qquad \frac{d \langle f_r \rangle_t}{dt} = \left\langle \frac{df_r}{dt} - f_r \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_k}{\partial p_k} \right\rangle_t = \langle \xi_r (f_r) \rangle_t , \qquad (r = 1 , 2 , \cdots , m) .$$

Considérons à présent v fonctions de ces m variables macroscopiques

$$F_l (t) = F_l (\langle f_1 \rangle_t , \langle f_2 \rangle_t , \cdots , \langle f_m \rangle_t) , \qquad (l = 1 , 2 , \cdots , v)$$

Alors, nous avons pour les flux de ces grandeurs, en tenant compte de (9),

$$J_l = \frac{dF_l}{dt} = \sum_{r=1}^{m} L_{lr} X_r , \qquad (l = 1 , 2 , \cdots , v)$$

où nous avons noté avec

$$L_{lr} = \frac{\partial F_l}{\partial \langle f_r \rangle_t} \quad , \quad X_r = \langle \xi_r (f_r) \rangle_t , \qquad (l = 1 , 2 , \cdots , v ; r = 1 , 2 , \cdots , m).$$

7. Il est facile de montrer que si pour chaque $q_0 = q(t_0)$, $p_0 = p(t_0)$ les intégrales

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial Q_k}{\partial p_k} du < +\infty \qquad (k = 1 , 2 , \cdots , s)$$

sont convergentes et s'il existe une constante $M > 0$, telle que, pour chaque $t > t_0$ et $q_0 = q(t_0)$, $p_0 = p(t_0)$ l'on a

$$-\int_{t_0}^{t} \frac{\partial Q_k}{\partial p_k} du < M$$

alors le système mécanique tend vers l'équilibre, c'est-à-dire, pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $(q_0 , p_0) \in \Gamma$ tel que $0 < \rho_{t_0}(q_0 , p_0) < +\infty$ il existe le nombre réel $T = T(\varepsilon , q_0 , p_0)$ tel que, aussitot ayant $t' > T$, $t'' > T$ il en résulte

$$| \rho_{t'}(q(q_0 , p_0 , t_0 , t') , p(q_0 , p_0 , t_0 , t') - \rho_{t''}(q(q_0 , p_0 , t_0 , t'') , p(q_0 , p_0 , t_0 , t'')) | < \varepsilon .$$

8. Nous supposons que la solution du système des équations quasi-canoniques (3) est une application biunivoque de Γ sur Γ. Alors le théorème H de L. Boltzmann démontré dans [6] reste valable.

9. Si nous supposons maintenant qu'il existe une fonction de force $U = U(q , t)$ telle que

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \qquad (k = 1 , 2 , \cdots , s)$$

alors, il résulte de (4) et (5) que le volume et la densité de probabilité dans l'espace des phases se conservent dans le temps, c'est-à-dire le théorème classique de Liouvile. Il résulte que les forces non-conservatives déterminent les lois d'évolution.

10. Les détails de ces problemes seront donnés dans [7].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ONICESCU O., *Nombres et systèmes aléatoires*. Bucarest–Paris, 1964.

[2] ONICESCU O., GUIAŞU S., *Principes mathématiques de la Mécanique statistique* (le livre est sous presse).

[3] HAMEL G., *Theoretische Mechanik*, Leipzig 1949.

[4] LEVI CIVITA P., AMALDI U., *Lezioni di Meccanica razionale* (3 vol.), Bologna 1923.

[5] JAYNES E.T., *Information Theory and Statistical Mechanics*, « Phys. Rev. », *106*, 620–630 (1957); *108*, 171–190 (1957).

[6] GUIAŞU S., *Sur le théorème* H *de L. Boltzmann*, «C.R. Acad. Sci., Paris», *261*, 1179–1181 (1965).

[7] GUIAŞU S., *La Mécanique statistique non-conservative*, « Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl. », *11* (1966).

RIASSUNTO. — In questo lavoro, noi presentiamo la Meccanica statistica per un sistema meccanico non conservativo, rinunziando all' ipotesi restrittiva che le forze generalizzate nello spazio delle configurazioni derivino da un potenziale.