Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mario Volpato

Schema per un modello (non lineare) di ripartizione degli aiuti finanziari statali intesi a favorire un armonico sviluppo economico sociale delle regioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.6, p. 438–446.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_6_438_0>

Ricerca operativa. — *Schema per un modello (non lineare) di ripartizione degli aiuti finanziari statali intesi a favorire un armonico sviluppo economico sociale delle regioni* (*). Nota di MARIO VOLPATO presentata (**) dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

1. INTRODUZIONE. – Per orientare l'attuazione dei programmi di sviluppo economico regionali al raggiungimento di determinati fini (quali, per esempio, un incremento nazionale delle attività economico–sociali, opportunamente armonizzato con una diminuzione degli squilibri regionali di dette attività), lo Stato può intervenire, per esempio, erogando aiuti finanziari destinati ad integrare i capitali necessari a sostenere il costo delle opere di interesse economico e sociale progettate nell'ambito delle singole regioni, implicita essendo l'ipotesi che parte dei capitali occorrenti per la realizzazione di dette opere sia reperibile, *in loco*, presso Enti e privati che non attingono al capitale dello Stato. Per l'autorità politica centrale si pone allora il problema della ripartizione (fra le varie regioni) degli aiuti finanziari statali, in modo da raggiungere l'obiettivo desiderato.

In questa breve Nota presento uno schema per un modello (non lineare) nel quale, dopo avere indicato una metodologia cui dovrebbero uniformarsi le Commissioni di programmazione regionale (e per calcolare i benefici sociali implicati dalle varie opere progettate nei vari settori della regione, e per dedurre da questi il beneficio sociale complessivo della regione, benefici da esprimersi in funzione dell'aiuto finanziario variabile che potrà essere corrisposto dallo Stato), viene formulato un obiettivo che tende ad elevare la somma dei benefici regionali complessivi e, simultaneamente, a diminuire il divario tra le attività ed i benefici sociali di una regione e quelli del complesso delle regioni (pensate come una sola regione) che, in un fissato ordinamento delle regioni, la precedono.

L'ordinamento di cui si parla può essere, per esempio, quello nel quale le regioni si susseguono secondo il valore decrescente (in senso lato) della media dei redditi pro–capite degli ultimi r anni (r potendo essere, per esempio, uguale a cinque).

Se dall'elaborazione dei programmi regionali (vedi n. 4) risulta che nel fissato ordinamento è: F_j il beneficio sociale relativo al complesso delle prime j regioni (pensate come una sola regione), f_{j+1} il beneficio sociale della successiva $(j+1)^{\text{ma}}$ regione, (benefici che, come abbiamo accennato, vanno espressi in funzione dell'aiuto finanziario variabile che corrisponderà lo Stato), un

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca Matematica n. 38 (Ca' Foscari, Venezia) del C.N.R. per l'anno accademico 1965–66.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1965.

obiettivo che può essere assunto è quello di rendere massima la differenza:

$$\frac{1}{2}(F_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2}|F_j - f_{j+1}| \tag{1}$$

per $j = 1, 2, \cdots, N$, ove N è il numero delle regioni.

La semisomma $\frac{1}{2}(F_j + f_{j+1})$ che figura nel primo addendo della (1), può essere interpretata come beneficio sociale lordo acquisibile nel complesso delle prime $(j + 1)$ regioni; la differenza media $\frac{1}{2}|F_j - f_{j+1}|$, (che in questo caso è anche lo scarto quadratico medio) fra F_j ed f_{j+1}, come una penalità relativa al complesso delle prime $j + 1$ regioni. Ne segue allora che l'espressione (1) appare come beneficio sociale, al netto della penalità, relativo al complesso delle prime $j + 1$ regioni.

Il beneficio lordo e la penalità figurano con lo stesso peso nella funzione obiettivo espressa dalla (1). Talvolta, però, può essere consigliabile pesare i due elementi (beneficio e penalità) con pesi diversi che, naturalmente, dovranno essere indicati dall'autorità politica. È allora opportuno assumere come criterio di ripartizione un massimante della differenza:

$$p_{j+1}(F_j + f_{j+1}) - (1 - p_{j+1})|F_j - f_{j+1}| \tag{2}$$

nella quale i pesi p_{j+1} e $(1 - p_{j+1})$ sono non negativi e che per p_{j+1} uguale ad $1/2$ porge la (1).

Per semplificare la comprensione del modello e del metodo che permette di determinare le politiche ottime di ripartizione, non considero i benefici sociali riflessi che un investimento in un certo settore di una regione può dare agli altri settori della regione stessa e a quelli delle altre regioni.

Del modello ampliato che tiene conto di siffatti benefici, si occuperà un altro componente del nostro Gruppo di Ricerca.

A conclusione di queste righe introduttive è forse il caso di rilevare esplicitamente che il modello qui proposto pur lasciando ampia libertà di azione alle singole regioni e sollecitando in queste le iniziative locali e l'impiego di capitali privati secondo il criterio di una razionale utilità sociale e di una ragionevole economia di mercato, permette allo Stato di intervenire per orientare a determinati fini di interesse nazionale tutte le attività economico-sociali del Paese.

Infine, è appena il caso di osservare che il ruolo che nel modello è svolto dalle regioni e dai settori, può essere assunto dai vari settori e sottosettori di una economia (nazionale o regionale), l'obiettivo mutandosi allora in un incremento delle attività nei settori, armonizzato con una diminuzione dello squilibrio fra i settori stessi. In sede operativa è forse il caso di applicare il modello nel senso ora precisato allorquando si programma a livello regionale, e di applicarlo invece nel modo col quale viene qui presentato quando (successivamente) si programma a livello nazionale. In tal modo l'obiettivo finale si arricchisce, nel senso che anche gli squilibri settoriali verrebbero presi in considerazione in vista di una loro compatibile riduzione.

2. INFORMAZIONI CHE DEBBONO RISULTARE DAI PIANI DI PROGRAMMAZIONE REGIONALE. – Abbiamo accennato che le regioni vanno ordinate secondo un fissato criterio che può essere quello nel quale esse si susseguono secondo il valore decrescente (o non crescente) della media dei redditi procapite accertati negli ultimi cinque o dieci (in generale, negli ultimi r) anni.

Detto $R_1, R_2, \cdots, R_i, \cdots, R_N$ l'ordinamento scelto, indichiamo le informazioni relative alla generica regione R_i che sono richieste dal nostro modello e che, naturalmente, debbono apparire nel piano di programmazione per lo sviluppo economico e sociale della regione R_i. Eccole, nell'ordine.

a) Le attività economiche e sociali della regione R_i debbono apparire, nel piano regionale, suddivise in certi settori: $S_{i1}, S_{i2}, \cdots, S_{ij}, \cdots, S_{in}$ che, tanto per esemplificare, potranno essere: vie di comunicazione (autostrade, canali, porti, aeroporti, ecc.), industria, agricoltura, assistenza sociale (ospedali, asili, ecc.), scuole e addestramento professionale, ecc.

b) Per ogni settore S_{ij} il piano deve indicare un insieme ordinato di opere di interesse economico sociale: $O_{ij1}, O_{ij2}, \cdots, O_{ij\nu_j}$ che potranno, eventualmente, essere realizzate nel settore stesso, rispettando la priorità fissata dall'ordine.

c) Per le opere di cui al comma precedente, il piano deve contemplare i rispettivi costi: $c_{ij1}, c_{ij2}, \cdots, c_{ij\nu_j}$ nonché i capitali: $c^*_{ij1}, c^*_{ij2}, \cdots, c^*_{ij\nu_j}$, $(c^*_{ij1} \leq c_{ij1}, c^*_{ij2} \leq c_{ij2}, \cdots, c^*_{ij\nu_j} \leq c_{ij\nu_j})$, che per la realizzazione delle stesse potranno essere reperiti presso Enti o privati che non attingono dallo Stato, di guisa che le differenze: $c_{ij1} - c^*_{ij1}, c_{ij2} - c^*_{ij2}, \cdots, c_{ij\nu_j} - c^*_{ij\nu_j}$ saranno, rispettivamente, gli aiuti finanziari da chiedere allo Stato per l'esecuzione eventuale delle opere stesse.

d) Il piano dovrà inoltre indicare i benefici sociali: $b_{ij1}, b_{ij2}, \cdots, b_{ij\nu_j}$ che possono derivare dalla realizzazione delle opere progettate. Le variabili da prendere in considerazione e l'elaborazione di queste variabili per costruire un indice che esprima l'utilità (il beneficio sociale) di un'opera vanno concordate a priori per ogni singola opera. Lo studio per una metodologia di questo tipo esula dal modello e potrà essere svolto a parte da una apposita commissione a livello nazionale [1]. Per quanto riguarda il nostro modello, l'essenziale è che tutte le Commissioni di programmazione a livello regionale

(1) Per l'avvio di una discussione in questo senso, si vegga, ad esempio, C. BENEDETTI, *Sugli indici della produttività sociale degli investimenti*, «Metron», Istituto di Statistica della Facoltà di Scienze Statistiche dell'Università di Roma, vol. XXIII, N. 1–4, dicembre 1964. È appena il caso di avvertire che tutte le ricerche statistiche di tipo economico, demografico, sociale, sociologico, che normalmente vengono predisposte per arricchire l'insieme di informazioni da utilizzare in sede di programmazione (e che molto spesso non vengono razionalmente utilizzate perché non si è predisposto un modello analitico del loro utilizzo per raggiungere determinati obiettivi) possono essere preziose, e, direi, indispensabili per costruire un indice di utilità come quello di cui si parla. Potremmo dire che tutto ciò fa parte della metodologia che serve per conoscere il sistema nel quale si vuole intervenire. Esula quindi dal nostro modello che tende invece a mettere a punto una metodologia per operare e intervenire nel sistema onde raggiungere un precisato obiettivo.

seguano una stessa procedura per costruire l'indice di utilità di un'opera di interesse economico sociale. Possiamo quindi richiedere che la Commissione di programmazione della regione R_i costruisca, per ogni settore S_{ij} della regione, una funzione $\varphi_{ij}(x_{ij})$ come la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc} \varphi_{ij}(x_{ij}) & 0 & b_{ij1} & \sum_{r=1}^{2} b_{ijr} & \cdots\cdots\cdots & \sum_{r=1}^{\nu_j} b_{ijr} \\ \hline x_{ij} & 0 & (c_{ij1}-c^*_{ij1}) & \sum_{r=1}^{2}(c_{ijr}-c^*_{ijr}) & \cdots & \sum_{r=1}^{\nu_j}(c_{ijr}-c^*_{ijr}) \end{array} .$$

Questa funzione mette in evidenza come varia il beneficio sociale, nel settore S_{ij}, al variare dell'aiuto finanziario x_{ij} che lo Stato potrà erogare nel settore stesso, implicita essendo la ipotesi, per altro presumibile, che l'aiuto finanziario statale possa assumere solo valori dell'insieme

$$\mathfrak{I}x_{ij} \xrightarrow{\text{def.}} \left(0\,, c_{ij1}-c^*_{ij1}\,, \sum_{r=1}^{2}(c_{ijr}-c^*_{ijr})\,, \cdots, \sum_{r=1}^{\nu_j}(c_{ijr}-c^*_{ijr})\right).$$

e) Infine nel piano di programmazione della regione R_i deve essere risolto il problema:

$$f_i(u_i) \xrightarrow{\text{def.}} \max_{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=u_i\,;\, x_{ij}\in\mathfrak{I}x_{ij}} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij})$$

mediante il quale restano determinate: la funzione $f_i(u_i)$ che porge il massimo beneficio sociale acquisibile nella regione R_i al variare del complessivo aiuto finanziario u_i che lo Stato potrà erogare per la regione stessa; le funzioni: $x_{i1}(u_i)\,, x_{i2}(u_i)\,, \cdots, x_{in}(u_i)$, (non necessariamente univoche) che porgono tutte le politiche di ripartizione dell'aiuto finanziario u_i fra i vari settori della regione R_i e che implicano il massimo beneficio sociale $f_i(u_i)$.

3. IL METODO DELLA PROGRAMMAZIONE DINAMICA PER COSTRUIRE LE FUNZIONI CHE PORGONO I BENEFICI SOCIALI REGIONALI $f_i(u_i)$. – Il problema di cui al comma *e*) del precedente paragrafo è, in generale, un problema di ottimazione non lineare che, notoriamente, può essere risolto col metodo della programmazione dinamica [(2)]. Qui di seguito lo riportiamo per sommi capi apportandovi quelle piccole varianti richieste dal caso particolare.

Siano allora: $S_{i1}, S_{i2}, \cdots, S_{ij}, \cdots, S_{in}$ i settori delle attività economico sociali della regione R_i, ordinati in un modo qualsivoglia. E siano: $\varphi_{i1}(x_{i1})$, $\varphi_{i2}(x_{i2}), \cdots, \varphi_{ij}(x_{ij}), \cdots, \varphi_{in}(x_{in})$ i benefici sociali (calcolati come si è detto

(2) Si vegga ad esempio M. VOLPATO, *Sull'applicazione del metodo della programmazione dinamica alla risoluzione di due particolari problemi di distribuzione*, Collana di Ricerca Operativa della Olivetti, ottobre 1961, oppure *Programmazione dinamica*, Atti del Convegno «Matematica ed Economia» promosso a Bressanone nel 1961 dal Centro di Mat. Applic. dell'Università di Padova.

al comma d) del precedente paragrafo) dei singoli settori della regione R_i. Si ricordi che il dominio nel quale sono definite queste funzioni non è lo stesso per tutte le funzioni. Come risulta dal comma d) del precedente paragrafo, la funzione $\varphi_{ij}(x_{ij})$ ha per dominio l'insieme:

$$\mathfrak{J}x_{ij} \longrightarrow \left(0 \, , \, c_{ij1} - c^*_{ij1} \, , \, \sum_{r=1}^{2} (c_{ijr} - c^*_{ijr}) \, , \cdots , \sum_{r=1}^{\nu_j} (c_{ijr} - c^*_{ijr}) \right)$$

che, atteso il significato degli elementi che vi appartengono, è da ritenersi diverso dall'insieme $\mathfrak{J}x_{ik}$, dominio del beneficio sociale del settore k–mo ($k \neq j$) della stessa regione R_i.

Ebbene, operando col metodo della programmazione dinamica, la soluzione del problema:

$$f_i(u_i) \xrightarrow{\text{def.}} \max_{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = u_i, x_{ij} \in \mathfrak{J}x_{ij}} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij})$$

si acquisisce a stadi successivi risolvendo nei vari stadi, rispettivamente, i problemi:

$$_2f_i(\xi_2) \xrightarrow{\text{def.}} \max_{x_{i1}+x_{i2}=\xi_2, x_{i1} \in \mathfrak{J}_{x_{i1}}, x_{i2} \in \mathfrak{J}_{x_{i2}}} \{ \varphi_{i1}(x_{i1}) + \varphi_{i2}(x_{i2}) \}$$

$$\xi_2 \in \mathfrak{J}_{\xi_2} \xrightarrow{\text{def.}} (0 \, , 1 \, , 2 \, , 3 \, , \cdots , \max \mathfrak{J}_{x_{i1}} + \max \mathfrak{J}_{x_{i2}})$$

$$_3f_i(\xi_3) \xrightarrow{\text{def.}} \max_{\xi_2 + x_{i3} = \xi_3, \xi_2 \in \bar{\mathfrak{J}}_{\xi_2}, x_{i3} \in \mathfrak{J}_{x_{i3}}} \{ _2f_i(\xi_2) + \varphi_{i3}(x_{i3}) \}$$

$$\xi_3 \in \mathfrak{J}_{\xi_3} \xrightarrow{\text{def.}} (0 \, , 1 \, , 2 \, , 3 \, , \cdots , \max \mathfrak{J}_{\xi_2} + \max \mathfrak{J}_{x_{i3}})$$

. . . .

$$_nf_i(\xi_n) \xrightarrow{\text{def.}} \max_{\xi_{n-1} + x_{in} = \xi_n ; \xi_{n-1} \in \bar{\mathfrak{J}}_{\xi_{n-1}} ; x_{in} \in \mathfrak{J}_{x_{in}}} \{ _{n-1}f_i(\xi_{n-1}) + \varphi_{in}(x_{in})$$

$$\xi_n \in \mathfrak{J}_{\xi_n} \xrightarrow{\text{def.}} (0 \, , 1 \, , 2 \, , 3 \, , \cdots , \max \mathfrak{J}_{\xi_{n-1}} + \max \mathfrak{J}_{x_{in}})$$

l'ultimo dei quali, per $\xi_n = u_i$, porge appunto la funzione $f_i(u_i)$ che ci interessa, e nei quali $\bar{\mathfrak{J}}_{\xi_2}, \cdots, \bar{\mathfrak{J}}_{\xi_{n-1}}$ sono, come vedremo tra poco, delle convenienti porzioni di $\mathfrak{J}_{\xi_2}, \cdots, \mathfrak{J}_{\xi_{n-1}}$.

Ad ogni stadio il problema da risolvere è pertanto unidimensionale, e la funzione $_hf_i(\xi_h)$, che si ottiene allo stadio h–mo, mostra, l'andamento del beneficio sociale relativo al complesso dei primi h settori (della regione R_i) al variare dell'aiuto finanziario statale ξ_h. Allo stadio h–mo, insieme con la funzione $_hf_i(\xi_h)$, si determinano anche le funzioni

$$x_{i1}(\xi_h) \quad ; \quad x_{i2}(\xi_h) \cdots x_{ih}(\xi_h)$$

non necessariamente univoche, che mostrano come va ripartito fra i primi h settori della regione il contributo statale per ottenere (dal complesso di questi primi h settori) il massimo beneficio sociale ${}_h f_i(\xi_h)$. Ecco come in pratica si possono predisporre i calcoli per ottenere la funzione ${}_2 f_i(\xi_2)$. Sul piano (x_{i1}, x_{i2}) si segnano i punti dell'insieme $\mathfrak{I}_{x_{i1}} \times \mathfrak{I}_{x_{i2}}$, prodotto scalare degli insiemi $\mathfrak{I}_{x_{i1}}, \mathfrak{I}_{x_{i2}}$. In ogni punto di coordinate $\left[\sum_{r=1}^{h}(c_{i1r} - c_{i1r}^*), \sum_{r=1}^{k}(c_{i2r} - c_{i2r}^*)\right]$ $\left(h = 0, 1, \cdots, \nu_1 ; k = 0, 1, \cdots, \nu_2 ; \sum_{r=1}^{0}(c_{i2r} - c_{i2r}^*) = \sum_{r=1}^{0}(c_{i2r} - c_{i2r}^*) = 0\right)$ si scrive il numero $\varphi_{i1}\left(\sum_{r=1}^{h}(c_{i1r} - c_{i1r}^*)\right) + \varphi_{i2}\left(\sum_{r=1}^{k}(c_{i2r} - c_{i2r}^*)\right)$, il numero zero risultando allora scritto sul vertice $(0, 0)$. Si considera poi l'insieme delle rette parallele

$$x_{i1} + x_{i2} = \xi_2, \qquad (\xi_2 = 0, 1, 2, \cdots, \max \mathfrak{I}_{x_{i1}} + \max \mathfrak{I}_{x_{i2}}), \tag{3}$$

ordinato secondo i valori crescenti di ξ_2. Ebbene, fissato un generico valore di ξ_2, per calcolare ${}_2 f_i(\xi_2)$ si procede come segue. Si considera la retta (del precedente insieme ordinato di parallele) corrispondente al fissato ξ_2. Se non è vuota l'intersezione di detta retta coi punti dell'insieme $\mathfrak{I}_{x_{i1}} \times \mathfrak{I}_{x_{i2}}$, si legge il più grande numero che sta scritto su detti punti, ed è questo numero il valore da attribuirsi a ${}_2 f_i(\xi_2)$. Se detta intersezione è vuota, allora si considera la retta dell'insieme ordinato (3) precedente a quella corrispondente al valore ξ_2 e si assume come ${}_2 f_i(\xi_2)$ il più grande numero che sta scritto sugli eventuali punti di intersezione di questa seconda retta con l'insieme $\mathfrak{I}_{x_{i1}} \times \mathfrak{I}_{x_{i2}}$. Se di tali punti non ve ne sono, si passa alla terza retta che precede la seconda considerata e si continua così fin tanto che non si incontra una delle parallele (3) che contiene punti dell'insieme $\mathfrak{I}_{x_{i1}} \times \mathfrak{I}_{x_{i2}}$ (una tale retta si incontrerà certamente perché al più sarà quella retta della (3) che passa per l'origine).

In questa maniera si costruisce la funzione ${}_2 f_i(\xi_2)$. È appena il caso di osservare che se $\xi_2^1 ; \xi_2^2 ; \xi_2^3, \cdots$ sono gli unici valori di ξ_2 per i quali le rette indicate in (3), contengono punti dell'insieme $\mathfrak{I}_{x_{i1}} \times \mathfrak{I}_{x_{i2}}$, allora il dominio della funzione ${}_2 f_i(\xi_2)$ è l'insieme $\mathfrak{I}_{\xi_2} \xrightarrow{\text{def.}} (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3, \cdots)$ che è una porzione di $\mathfrak{I}_{\xi_2}$. Ebbene, è proprio questa porzione di $\mathfrak{I}_{\xi_2}$ quella che figura col simbolo $\bar{\mathfrak{I}}_{\xi_2}$ nel problema da risolversi al secondo stadio. Per questo problema si procede come per quello risolto al primo stadio, e si trova così ${}_3 f_i(\xi_3)$. Continuando in questo modo si arriva alla funzione ${}_n f_i(\xi_n)$ la quale, chiamando u_i la variabile indipendente ξ_n, porge la funzione $f_i(u_i)$ che vogliamo ottenere e che rappresenta il massimo beneficio sociale acquisibile nella regione R_i se l'aiuto finanziario dello Stato sarà al livello u_i.

4. ELABORAZIONE DELLE INFORMAZIONI REGIONALI PER LA RICERCA DI UNA RIPARTIZIONE OTTIMA DEGLI AIUTI FINANZIARI STATALI. – Supponiamo di disporre delle N funzioni

$$f_1(u_1) \quad , \quad f_2(u_2), \cdots, f_N(u_N),$$

definite, rispettivamente, negli insiemi

$$\mathfrak{J}_{u_1} = (u_1^1 ; u_1^2 \cdots u_1^{S_1}) \quad ; \quad \mathfrak{J}_{u_2} = (u_2^1 ; u_2^2 ; \cdots u_2^{S_2}) ; \cdots \mathfrak{J}_{u_N} = (u_N^1 ; u_N^2 \cdots u_N^{S_N})$$

e che rappresentano il massimo beneficio sociale al variare dell'aiuto finanziario statale, acquisibile, rispettivamente, nelle regioni $R_1 , R_2 , \cdots , R_N$, ordinate secondo il valore decrescente della media dei redditi pro-capite degli ultimi r anni. Vediamo allora come si può operare per trovare una politica di ripartizione degli aiuti finanziari statali la quale renda massimo il valore dell'espressione:

$$p_{j+1} (F_j + f_{j+1}) - (1 - p_{j+1}) \mid F_j - f_{j+1} \mid$$

ove F_j è una conveniente funzione che porge il massimo beneficio sociale acquisibile nel complesso delle prime j regioni (pensate come una sola regione) e che definiremo ora nel corso del procedimento risolutivo.

Anzitutto osserviamo che la funzione obiettivo può essere semplificata dal punto di vista formale. Essa, infatti, può scriversi $p_{j+1}[(F_j + f_{j+1}) + \mid F_j - f_{j+1} \mid] - \mid F_j - f_{j+1} \mid$; e questa, osservando che $(F_j + f_{j+1}) + \mid F_j - f_{j+1} \mid = 2 \max (F_j , f_{j+1})$, diventa $2 p_{j+1} \max (F_j , f_{j+1}) - \mid F_j - f_{j+1} \mid$.

Pertanto la funzione obiettivo è la seguente:

$$(2 p_{j+1} - 1) \max (F_j , f_{j+1}) + \min (F_j , f_{j+1}) \tag{4}$$

che, per $p_{j+1} = 1/2$ si riduce alla

$$\min (F_j , f_{j+1}) . \tag{5}$$

Ciò premesso, descriviamo il processo risolutivo da attuarsi, anche stavolta, a stadi successivi. Ecco il lavoro da compiersi al 1° stadio.

Si considerano le prime due regioni, R_1 ed R_2, dell'ordinamento e nelle quali i massimi benefici sociali acquisibili sono, rispettivamente, $f_1 (u_1)$ ed $f_2 (u_2)$. Ammesso che per il complesso delle due regioni (pensate come una sola regione) sia v_2 il livello dell'aiuto finanziario statale, si risolve il problema

$$\max_{u_1+u_2=v_2, u_1 \in \mathfrak{J}_{u_1}, u_2 \in \mathfrak{J}_{u_2}} \{ (2 p_2 - 1) \max (f_1 (u_1) , f_2 (u_2)) + \min (f_1 (u_1) , f_2 (u_2)) \} \tag{6}$$

mediante il quale si trovano le funzioni

$$u_1 (v_2) \quad , \quad u_2 (v_2) \tag{7}$$

(non necessariamente univoche) che determinano le politiche di ripartizione fra le due regioni del complessivo aiuto finanziario v_2, e che rendono massimo il valore della funzione obiettivo relativa alle prime due regioni [3]. Il bene-

(3) Per la risoluzione di questo problema si può seguire il procedimento indicato nel precedente n. 3 per la costruzione della funzione $_2f_i (\xi_2)$.

ficio sociale relativo al complesso delle due regioni (pensate, appunto, come una sola regione) implicato dalla ripartizione (7) è allora

$$f_1(u_1(v_2)) + f_2(u_2(v_2)) \xrightarrow{\text{def.}} F_2(v_2) \tag{8}$$

che noi, appunto, consideriamo come acquisibile nel complesso delle prime due regioni e compatibile dall'obiettivo fissato.

Analogamente a quanto abbiamo osservato alla fine del precedente n. 3 a proposito del dominio della funzione ${}_2f_i(\xi_2)$, possiamo ora dire che il dominio della funzione $F_2(v_2)$ sarà un insieme $\mathfrak{J}_{v_2} = (v_2^1, v_2^2, \cdots, v_2^{t_2})$ ove v_2^r è tale per cui la retta di equazione $u_1 + u_2 = v_2^r$ ha intersezione non vuota con l'insieme $\mathfrak{J}_{u_1} \times \mathfrak{J}_{u_2}$, prodotto cartesiano dei due insiemi $\mathfrak{J}_{u_1}$ e $\mathfrak{J}_{u_2}$.

Vediamo ora il lavoro da compiersi al 2° stadio. Si considera il complesso delle due prime regioni (pensate come una sola regione e che, usando il simbolo di unione, converrà rappresentare con la scrittura $R_1 \cup R_2$) e la terza regione. Il massimo beneficio sociale acquisibile nell'unione $R_1 \cup R_2$ è (come abbiamo visto al 1° stadio) $F_2(v_2)$, mentre il massimo beneficio acquisibile nella regione R_3 è $f_3(u_3)$. Allora, supposto che il complessivo aiuto finanziario per le tre prime regioni sia v_3, si risolve il problema

$$\max_{v_2+u_3=v_3\,;\, v_2\in\mathfrak{J}_{v_2}\,;\, u_3\in\mathfrak{J}_{u_3}} \{(2p_3 - 1)\max(F_2(v_2), f_3(u_3)) + \min(F_2(v_2), f_3(u_3))\}$$

mediante il quale si determinano le politiche di ripartizione $v_2(v_3)$, $u_3(v_3)$ del complessivo aiuto finanziario v_3 e da assegnare, rispettivamente, all'unione $R_1 \cup R_2$ delle prime due regioni e alla terza regione. Per trovare poi come va ripartita la quota $v_2(v_3)$ fra le prime due regioni, non c'è che da porre questo valore della quota spettante all'unione $R_1 \cup R_2$ (cioè la quota $v_2(v_3)$) al posto del generico v_2 che figura nel lavoro svolto al primo stadio e precisamente nelle (7).

Si otterrà così la ripartizione $u_1(v_3)$, $u_2(v_3)$, $u_3(v_3)$ fra le prime tre regioni del complessivo aiuto finanziario ad essa destinato. Il beneficio sociale implicato da questa ripartizione è $F_2(v_2(v_3)) + f_3(u_3(v_3)) \xrightarrow{\text{def.}} F_3(v_3)$, che noi considereremo come massimo beneficio acquisibile nell'unione $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ delle prime tre regioni e compatibile con l'obiettivo fissato.

È oramai chiaro il lavoro da compiersi al 3° stadio, ove si ripartirà il complessivo aiuto finanziario v_4 (destinato alle prime quattro regioni) fra l'unione delle prime tre regioni $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ e la quarta regione R_4. Sul modo col quale è conveniente ripartire la quota $v_3(v_4)$, spettante all'unione $R_1 \cup R_2 \cup R_3$, non c'è che da riprendere il lavoro svolto al precedente stadio, ponendo ivi $v_3(v_4)$ al posto del generico v_3.

Così seguitando, si arriva allo stadio N–mo in cui si determina la ripartizione ottima fra l'unione delle prime N–1 regioni e l'ultima.

In tal modo il problema della ripartizione ottima fra le regioni del complessivo aiuto finanziario (variabile) messo a disposizione dello Stato è da ritenersi risolto.

SUMMARY. — The national territory of a state is assumed to be subdivided into regions, a program of development of socio-economic activities is forecast for each region.

It is also assumed that the state may supply financial aid in order to carry out the realization of regional programs which permit the accomplishment of established national aims.

The objective here considered is the increase of socio-economic activities on the national level harmonized with a decrease of the regional imbalances presented by such activities, and, in this case, with a decrease of the imbalances among the sectors according to which the same activities may be classified.

The model is non-linear and makes use of the method of dynamic programming for determining how any state financial aid may be distributed among the regions in order to reach the pre-established objective.