Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marcello Bruni

Sulla nozione di deviazione caratteristica nello spazio vettoriale quaternionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.6, p. 431–437.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_6_431_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Geometria. — *Sulla nozione di deviazione caratteristica nello spazio vettoriale quaternionale* (*). Nota di MARCELLO BRUNI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

1. INTRODUZIONE. – In precedenti lavori [1, 2], generalizzando proprietà note nel caso complesso (cfr. Rizza [8, 9], Martinelli [5]), ho introdotto la nozione di *deviazione caratteristica* per gli spazi E_m ($m = 1, 2, 3, 4$) dello spazio euclideo centrato E_{4n}, sul quale si rappresenti come al solito $\mathbf{Q}^n \equiv \mathbf{R}^{4n}$ ($\mathbf{R}$ campo dei reali, $\mathbf{Q}$ corpo degli ordinari quaternioni). Tale deviazione è stata ivi chiamata *assoluta*, perché non tiene conto dell'orientazione dell' E_m; essa è espressa da un angolo compreso tra 0 e $\pi/2$, che risulta tanto minore quanto più l'E_m è prossimo ad essere pseudocaratteristico, ossia contenuto in un E_4 caratteristico.

Nel presente lavoro, generalizzando in un'altra direzione una formula di Martinelli per il caso complesso, riesco a definire una *deviazione caratteristica relativa* per ogni E_{4p} ($p = 1, \cdots, n$) di E_{4n}. Si tratta di un angolo, compreso tra 0 e π, che questa volta dipende anche dall'orientazione dell'E_{4p} (da cui l'attributo « relativa »). I valori minimo e massimo di tale angolo corrispondono agli E_{4p} caratteristici, dotati risp. dell'orientazione positiva e negativa.

Le due differenti definizioni per la deviazione caratteristica di un E_m di E_{4n} sono tra loro confrontabili nel caso $m = 4$. Resta tuttavia aperto il problema di trovare tra esse un legame esplicito.

2. RICHIAMI. – Come in [1] identifichiamo lo spazio vettoriale quaternionale destro $\mathbf{Q}^n$ allo spazio vettoriale $\mathbf{R}^{4n}$, e diciamo *caratteristici* i sottospazi di $\mathbf{R}^{4n}$ di dimensione (reale) $4p$ che si identificano così ai sottospazi di $\mathbf{Q}^n$ di dimensione (quaternionale) p.

Consideriamo in $\mathbf{Q}^n \equiv \mathbf{R}^{4n}$ la *metrica hermitiana* indotta dal prodotto hermitiano:

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{M} = \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{\mathrm{L}}^\alpha \mathrm{M}^\alpha \tag{2.1}$$

ove $\mathrm{L}^\alpha, \mathrm{M}^\alpha$ sono le componenti quaternionali di L, M ed $\bar{\mathrm{L}}^\alpha$ è il quaternione coniugato di L^α.

Introduciamo altresì in $\mathbf{R}^{4n}$ la *metrica euclidea*, indotta dal prodotto scalare:

$$\mathrm{L} \times \mathrm{M} = \mathrm{Re}\,(\mathrm{L} \cdot \mathrm{M}) \tag{2.2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1965–1966.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1965.

che dà ad $\mathbf{R}^{4n}$ la struttura di spazio euclideo E_{4n}, cosicché considereremo identificati $\mathbf{Q}^n$, $\mathbf{R}^{4n}$, E_{4n}.

Ricordiamo da [1] le biiezioni (rotazioni di E_{4n}):

$$\mathfrak{I} : L \to Li \quad , \quad J : L \to Lj \quad , \quad \mathfrak{K} : L \to Lk \tag{2.3}$$

e la:

$$L \cdot M = L \times M + i\,(\mathfrak{I}L \times M) + j\,(JL \times M) + k\,(\mathfrak{K}L \times M). \tag{2.4}$$

Valgono inoltre le formule:

$$\begin{cases} L \times Li = L \times Lj = L \times Lk = Li \times Lj = Lj \times Lk = Lk \times Li = 0 \\ L \times Mi = -Li \times M = Lj \times Mk = -Lk \times Mj \end{cases} \tag{2.5}$$

e le analoghe di queste ultime che si ottengono ruotando le unità i, j, k.

Dalla (2.4) si deduce che i vettori L, M sono *a prodotto hermitiano reale* (brev. *p.h.r.*) se e solo se $\mathfrak{I}L \times M = JL \times M = \mathfrak{K}L \times M = 0$.

Ricordiamo infine che (1):

(2.6) *un* $E_t \subset E_{4n}$ $(t \leq n)$ è *p.h.r.* (cioè ogni sua coppia di vettori è p.h.r.) *se e solo se è totalmente ortogonale* a ciascuno degli spazi $\mathfrak{I}E_t$, JE_t, $\mathfrak{K}E_t$.

3. Premessa relativa al caso complesso. – Per le generalizzazioni che abbiamo di mira, è opportuno rifarsi un momento ad una formula di Martinelli [5], che esprime la deviazione caratteristica, nel caso complesso, per un E_2 di $E_{2n} \equiv \mathbf{C}^n$ ($\mathbf{C}$ campo complesso).

Indicato con $\Lambda = L_1 \wedge L_2$ un bivettore dell'E_2, si considera il *prodotto caratteristico* dei vettori L_1 ed L_2:

$$L_1 * L_2 = \operatorname{Im}(L_1 \cdot L_2) = L_1 i \times L_2$$

e si prova che esso dipende soltanto dal bivettore Λ.

La formula citata è allora:

$$\cos \delta_{E_2} = \frac{L_1 * L_2}{\operatorname{mis} \Lambda} \quad , \quad 0 \leq \delta_{E_2} \leq \pi. \tag{3.1}$$

Introduciamo ora il bivettore $\mathfrak{I}\Lambda = \mathfrak{I}L_1 \wedge \mathfrak{I}L_2 = L_1 i \wedge L_2 i$. Come è noto (2) il *prodotto scalare* $\mathfrak{I}\Lambda \times \Lambda$ uguaglia il determinante della matrice

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} L_1 i \times L_1 & L_1 i \times L_2 \\ L_2 i \times L_1 & L_2 i \times L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_1 i \times L_2 \\ -L_1 i \times L_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ove l'ultima uguaglianza discende dalle (2.5).

(1) Ved. M. Bruni [1], p. 489, Teor. 1.

(2) Cfr. per esempio E. Cartan [3], cap. 1 e G. B. Rizza [9].

Appare dunque che:

$$L_1 * L_2 = \mathrm{Pf}\, A(\Lambda) \quad (3.2)$$ [3]

dove con $\mathrm{Pf}\, A(\Lambda)$ denotiamo lo *pfaffiano* della matrice emisimmetrica $A(\Lambda)$ [4].

La (3.2) costituirà il nostro punto di partenza per la generalizzazione della (3.1) al caso dapprima di un E_4 e poi di un E_{4p} di $E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$.

4. DEVIAZIONE CARATTERISTICA RELATIVA DI UN $E_4 \subset E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$. – Consideriamo l'$E_4$ di $E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$ determinato dai vettori L_1, L_2, L_3, L_4, e su di esso l'orientazione definita dal 4–vettore $\Lambda = L_1 \wedge L_2 \wedge L_3 \wedge L_4$.

Prendiamo in esame le matrici del 4° ordine $A_{\mathfrak{J}}(\Lambda)$, $A_J(\Lambda)$, $A_{\mathfrak{K}}(\Lambda)$, i cui determinanti esprimono rispettivamente i prodotti scalari $\mathfrak{J}\Lambda \times \Lambda$, $J\Lambda \times \Lambda$, $\mathfrak{K}\Lambda \times \Lambda$. Analogamente a quanto visto dal n. 3, si ha qui, per esempio:

$$A_{\mathfrak{J}}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathfrak{J}L_1 \times L_1 & \mathfrak{J}L_1 \times L_2 & \mathfrak{J}L_1 \times L_3 & \mathfrak{J}L_1 \times L_4 \\ \mathfrak{J}L_2 \times L_1 & \mathfrak{J}L_2 \times L_2 & \mathfrak{J}L_2 \times L_3 & \mathfrak{J}L_2 \times L_4 \\ \mathfrak{J}L_3 \times L_1 & \mathfrak{J}L_3 \times L_2 & \mathfrak{J}L_3 \times L_3 & \mathfrak{J}L_3 \times L_4 \\ \mathfrak{J}L_4 \times L_1 & \mathfrak{J}L_4 \times L_2 & \mathfrak{J}L_4 \times L_3 & \mathfrak{J}L_4 \times L_4 \end{pmatrix}.$$

Per le (2.5) tali matrici risultano anch'esse emisimmetriche, onde possiamo considerarne i relativi pfaffiani: $\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{J}}(\Lambda)$, $\mathrm{Pf}\, A_J(\Lambda)$, $\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{K}}(\Lambda)$.

Osserviamo preliminarmente che:

(4.1) *Ciascuno dei tre pfaffiani* $\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{J}}(\Lambda)$, $\mathrm{Pf}\, A_J(\Lambda)$, $\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{K}}(\Lambda)$, *è, in valore assoluto, minore od uguale a mis* Λ.

Infatti si ha:

$$\cos(\mathfrak{J}E_4, E_4) = \frac{\mathfrak{J}\Lambda \times \Lambda}{(\mathrm{mis}\, \mathfrak{J}\Lambda)(\mathrm{mis}\, \Lambda)}$$

da cui, tenendo conto che $\mathfrak{J}$ è una rotazione e dunque $\mathrm{mis}\, \mathfrak{J}\Lambda = \mathrm{mis}\, \Lambda$, segue:

$$\cos(\mathfrak{J}E_4, E_4) = \frac{[\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{J}}(\Lambda)]^2}{(\mathrm{mis}\, \Lambda)^2}. \quad (4.2)$$

Dalla (4.2) e dalle analoghe per J, $\mathfrak{K}$, si trae subito la (4.1).

Ciò posto, definiamo la *deviazione caratteristica relativa* $\delta^{(r)}_{E_4}$ dell'E_4 orientato mediante la formula seguente:

$$\cos \delta^{(r)}_{E_4} = -\frac{1}{3\, \mathrm{mis}\, \Lambda} [\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{J}}(\Lambda) + \mathrm{Pf}\, A_J(\Lambda) + \mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{K}}(\Lambda)], \quad 0 \leq \delta^{(r)}_{E_4} \leq \pi. \quad (4.3)$$

(3) La formula (3.2) è dovuta sostanzialmente alla dott. A. Dotti che, in un lavoro non ancora pubblicato, ha generalizzato la (3.1) al caso di un $E_{2p} \subset E_{2n} \equiv \mathbf{C}^n$. I risultati essenziali di tale lavoro mi sono stati comunicati dal prof. E. Martinelli.

(4) Ci occorrerà per il seguito ricordare, più in generale, che lo pfaffiano di una matrice emisimmetrica $A = (a_{rs})_{r,s=1,\cdots,2m}$ è espresso da: $\mathrm{Pf}\, A = \Sigma (-1)^{\varepsilon} a_{r_1 s_1} \cdots a_{r_m s_m}$, dove la somma è estesa a tutte le permutazioni $r_1, s_1, \cdots, r_m, s_m$ di $1, 2, \cdots, 2m$ con $r_1 < s_1, \cdots, r_m < s_m$ e $r_1 < \cdots < r_m$, essendo ε la classe della corrispondente permutazione.

Si ha intanto, da (4.1), che il secondo membro della (4.3) è in valore assoluto ≤ 1, cosicché esso può pensarsi come un coseno.

Osserviamo poi che, in base alle (4.2) e alle analoghe, ciascuno dei tre rapporti:

$$\frac{\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{J}}(\Lambda)}{\mathrm{mis}\,\Lambda} \quad , \quad \frac{\mathrm{Pf}\, A_{J}(\Lambda)}{\mathrm{mis}\,\Lambda} \quad , \quad \frac{\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{K}}(\Lambda)}{\mathrm{mis}\,\Lambda} \tag{4.4}$$

resta individuato in valore assoluto sostituendo Λ con un altro 4-vettore (non degenere) appartenente allo stesso E_4. Per ragioni di continuità i rapporti (4.4) restano quindi invariati in valore assoluto e segno sostituendo Λ con un 4-vettore equiverso; mentre cambiano simultaneamente segno se si sostituisce Λ con un 4-vettore contraverso, come si riconosce per esempio passando da $\Lambda = L_1 \wedge L_2 \wedge L_3 \wedge L_4$ a $\Lambda' = (-L_1) \wedge L_2 \wedge L_3 \wedge L_4$.

Ne segue che il segno di $\cos \delta_{E_4}^{(r)}$ dipende dall'orientazione che Λ attribuisce all'E_4. Se si indica con E_4^- lo stesso spazio con l'orientazione opposta, si ha dunque:

$$\delta_{E_4}^{(r)} + \delta_{E_4^-}^{(r)} = \pi . \tag{4.5}$$

Proviamo ora che risulta $\delta_{E_4}^{(r)} = 0$ *se e solo se* l'E_4 è caratteristico ed ha l'orientazione indotta dal 4-vettore $\Lambda = L \wedge (\mathfrak{J}L) \wedge (JL) \wedge (\mathfrak{K}L)$, orientazione che non dipende dalla scelta di L [5] e che diremo *positiva*.

Supponiamo dunque che l'E_4 sia caratteristico, ed orientato positivamente dal 4-vettore Λ sopra considerato; assunto anzi, per semplicità, mis $L = 1$, ne segue che anche i vettori $\mathfrak{J}L$, JL, $\mathfrak{K}L$ sono unitari; tenuto conto delle $(2.5)_1$ si ha anche mis $\Lambda = 1$. D'altra parte risulta: $\mathfrak{J}\Lambda = (\mathfrak{J}L) \wedge (-L) \wedge (-\mathfrak{K}L) \wedge (JL)$ onde nella matrice $A_{\mathfrak{J}}(\Lambda)$ si ha $a_{12} = -a_{34} = 1$, $a_{13} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$. È quindi $\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{J}}(\Lambda) = -1$; analogamente si trova: $\mathrm{Pf}\, A_J(\Lambda) = \mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{K}}(\Lambda) = -1$. Dalla (4.3) si ottiene perciò $\delta_{E_4}^{(r)} = 0$.

Viceversa, supponiamo che risulti $\delta_{E_4}^{(r)} = 0$ e che l'orientazione dell'E_4 sia quella indotta dal 4-vettore $\Lambda = L_1 \wedge L_2 \wedge L_3 \wedge L_4$, con L_1, L_2, L_3, L_4 vettori unitari ed ortogonali. Ne segue mis $\Lambda = 1$, e – tenuto conto di (4.1) – dalla (4.3) si deduce:

$$|\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{J}}(\Lambda)| = |\mathrm{Pf}\, A_J(\Lambda)| = |\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{K}}(\Lambda)| = 1 .$$

In base alla (4.2) si ha allora che è $\cos(\mathfrak{J}E_4, E_4) = \cos(JE_4, E_4) = \cos(\mathfrak{K}E_4, E_4) = 1$, onde l'$E_4$ considerato coincide con ciascuno degli spazi $\mathfrak{J}E_4$, JE_4, $\mathfrak{K}E_4$, cioè si tratta di un E_4 caratteristico. Ed anzi si tratta di un E_4 caratteristico orientato positivamente, perché altrimenti, per la (4.5), si avrebbe $\delta_{E_4}^{(r)} = \pi$, anziché $\delta_{E_4}^{(r)} = 0$.

Osserviamo infine che se l'E_4 è p.h.r. e quindi, (2.6), totalmente ortogonale ad $\mathfrak{J}E_4$, JE_4, $\mathfrak{K}E_4$, risulta per le (4.2), (4.3): $\delta_{E_4}^{(r)} = \pi/2$.

(5) Ved. M. BRUNI [2], n. 7.2.

Possiamo in definitiva enunciare il:

TEOREMA. - *Ad ogni* $E_4 \subset E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$ *orientato si può associare un angolo* $\delta_{E_4}^{(r)}$ *- deviazione caratteristica relativa dell'* E_4 *- definito dalla* (4.3). *Le deviazioni caratteristiche* $\delta_{E_4}^{(r)}$, $\delta_{E_4^-}^{(r)}$ *corrispondenti all'orientazione assunta su* E_4 *e all'opposta sono tali che* $\delta_{E_4}^{(r)} + \delta_{E_4^-}^{(r)} = \pi$.

Risulta inoltre: $\delta_{E_4}^{(r)} = 0$ *se e solo se l'* E_4 *è caratteristico ed orientato positivamente*; $\delta_{E_4}^{(r)} = \pi/2$ *se l'* E_4 *è a prodotto hermitiano reale.*

5. DEVIAZIONE CARATTERISTICA RELATIVA DI UN E_{4p} DI $E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$. - Mostriamo ora rapidamente come la nozione di deviazione caratteristica relativa introdotta per gli E_4 di $E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$ si estenda agli E_{4p} $(p = 2, \cdots, n)$.

Consideriamo un E_{4p} individuato dai vettori $L_1, \cdots, L_{4p}$ ed in esso l'orientazione data dal $4p$-vettore $\Lambda = L_1 \wedge \cdots \wedge L_{4p}$. Le matrici $A_{\mathfrak{I}}(\Lambda)$, $A_{\mathfrak{J}}(\Lambda)$, $A_{\mathcal{K}}(\Lambda)$ i cui determinanti dànno i prodotti scalari $\mathfrak{I}\Lambda \times \Lambda$, $J\Lambda \times \Lambda$, $\mathcal{K}\Lambda \times \Lambda$ sono ancora emisimmetriche; per i relativi pfaffiani valgono ancora le (4.1), (4.2).

Ciò posto, definiamo la *deviazione caratteristica relativa* dell'E_{4p} orientato mediante la formula:

$$(5.1) \qquad \cos \delta_{E_{4p}}^{(r)} = \frac{(-1)^p}{3 \operatorname{mis} \Lambda} \left[\operatorname{Pf} A_{\mathfrak{I}}(\Lambda) + \operatorname{Pf} A_J(\Lambda) + \operatorname{Pf} A_{\mathcal{K}}(\Lambda) \right], \qquad 0 \leq \delta_{E_{4p}}^{(r)} \leq \pi$$

che generalizza la (4.3).

Ripetendo lo stesso ragionamento del n. 4 si accerta che la (5.1) è corretta, che l'angolo $\delta_{E_{4p}}^{(r)}$ dipende solo dall'E_{4p} orientato, e che risulta:

$$(5.2) \qquad \delta_{E_{4p}}^{(r)} + \delta_{E_{4p}^-}^{(r)} = \pi .$$

Ci domandiamo ora quali siano i possibili valori di $\delta_{E_{4p}}^{(r)}$ se l'E_{4p} è caratteristico.

Osserviamo preliminarmente che:

(5.3) un E_{4p} *caratteristico* di $E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$ ha un'*orientazione intrinseca* che diremo *positiva*. È tale l'orientazione indotta nell'E_{4p} dal $4p$-vettore non degenere $\Lambda = L_1 \wedge (\mathfrak{I}L_1) \wedge (JL_1) \wedge (\mathcal{K}L_1) \wedge \cdots \wedge L_p \wedge (\mathfrak{I}L_p) \wedge (JL_p) \wedge (\mathcal{K}L_p)$, orientazione che non dipende dai vettori $L_1, \cdots, L_p$, come ora mostriamo.

Scegliamo in E_{4p} p nuovi vettori $L'_1, \cdots, L'_p$ in modo che il $4p$-vettore $\Lambda' = L_1 \wedge (\mathfrak{I}L') \wedge (JL'_1) \wedge (\mathcal{K}L') \wedge \cdots \wedge L'_p \wedge (\mathfrak{I}L'_p) \wedge (JL'_p) \wedge (\mathcal{K}L'_p)$ sia non degenere.

Lo spazio E_{4p} è l'immagine reale di uno spazio di dimensione p su $\mathbf{Q}$, nel quale vengono ora poste in luce le due p-ple di rette (centrate) che corrispondono risp. agli E_4 caratteristici passanti per i vettori L_h ed a quelli per i vettori L'_h.

È ora ovviamente possibile far variare in modo continuo la prima p-pla di rette in modo che esse si conservino indipendenti e si sovrappongano alle rette corrispondenti della seconda p–pla. Durante tale variazione si conservano indipendenti (su $\mathbf{R}$) anche i vettori L_h, $\mathfrak{J}L_h$, JL_h, $\mathfrak{K}L_h$ $(h = 1, \cdots, p)$ che ora è comodo pensare variabili.

Tenuto conto dell'osservazione richiamata alla nota (5), la (5.3) è così dimostrata.

Valutiamo ora la deviazione caratteristica relativa di un E_{4p} caratteristico orientato positivamente. Tale orientazione sia indotta dal $4p$–vettore $\Lambda = L_1 \wedge (\mathfrak{J}L_1) \wedge (JL_1) \wedge (\mathfrak{K}L_1) \wedge \cdots \wedge L_p \wedge (\mathfrak{J}L_p) \wedge (JL_p) \wedge (\mathfrak{K}L_p)$ ove i vettori $L_1, \cdots, L_p$ hanno misura unitaria e gli E_4 caratteristici passanti per ciascuno di essi sono ortogonali.

Di conseguenza, i $4p$ vettori sopra indicati costituiscono un rifornimento ortonormale per l' E_{4p}, e si ha quindi: mis $\Lambda = 1$. D'altra parte si accerta subito che risulta:

$$A_{\mathfrak{J}}(\Lambda) = \begin{pmatrix} A' & & \\ & \ddots & \\ & & A' \end{pmatrix} \quad \text{ove si è posto} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{J}}(\Lambda)$ vale $(-1)^p$, e lo stesso valore hanno $\mathrm{Pf}\, A_J(\Lambda)$ e $\mathrm{Pf}\, A_{\mathfrak{K}}(\Lambda)$, come si riconosce analogamente.

Tenuto conto della (5.1) si conclude che se l'E_{4p} è caratteristico ed orientato positivamente, è $\delta^{(r)}_{E_{4p}} = 0$.

Questo risultato si inverte ragionando come nel caso degli E_4, e tenendo conto della (5.2). Allo stesso modo si accerta che se l'E_{4p} $(4p \leq n)$ è a prodotto hermitiano reale risulta $\delta^{(r)}_{E_{4p}} = \pi/2$.

Si ha dunque che *sussiste un teorema del tutto analogo a quello del n. 4, concernente la deviazione caratterica relativa* $\delta^{(r)}_{E_{4p}}$ *di un* E_{4p} *di* E_{4n}.

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. BRUNI, *Relazioni tra metrica euclidea ed hermitiana in uno spazio vettoriale quaternionale*, « Rend. Lincei », ser. 8ª, *38* (1965).

[2] M. BRUNI, *Su alcune proprietà di geometria euclidea ed hermitiana in uno spazio vettoriale quaternionale*, « Ann. di mat. pura e appl. » *72* (1965).

[3] E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*; 2me ed.; Gauthier–Villars, Paris (1951).

[4] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Internationale Matematico Estivo, C.I.M.E., Cremonese, Roma (1956).

[5] E. MARTINELLI, *Generalizzazione dei teoremi di minimo volume di Wirtinger a tutte le varietà kähleriane o quasi kähleriane*, « Ann. di Mat. pura e appl. », *50* (1960).

[6] E. MARTINELLI, *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, « Rend. Lincei », ser. 8ª, *26* (1959).

[7] E. MARTINELLI, *Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale*, « Ann. di mat. pura e appl. », *49* (1960).
[8] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, « Rend. Lincei », ser. 8ª, *24* (1958).
[9] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica e proprietà locali delle 2 q-faccette di una* V_{2n} *a struttura complessa*, « Rend. Acc. Naz. XL », *10* (1959).

SUMMARY. — A " relative " characteristic deviation is given for the E_{4p} ($p = 1, \cdots, n$) of the quaternion vector space $\mathbf{Q}^n \equiv E_{4n}$.