Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Ghizzetti

Su due configurazioni di dominii che ricoprono la varietà di Hurwitz

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.6, p. 422–427.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_6_422_0>

Analisi matematica. — *Su due configurazioni di dominii che ricoprono la varietà di Hurwitz* (*). Nota di ALDO GHIZZETTI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. In un precedente lavoro (vedi [1] nella Bibliografia), a proposito di certi criteri di stabilità per equazioni differenziali ordinarie lineari, ho avuto occasione di introdurre, in uno spazio euclideo reale R^n $(n \geq 2)$, due sistemi ∞^n di dominii limitati $E_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ e $D_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ (dipendenti dagli n parametri $\rho_1, \cdots, \rho_n$) definiti nel modo seguente.

Sia $(\rho_1, \cdots, \rho_n)$ un gruppo *non ordinato* di numeri reali o complessi, *a due a due distinti e tutti con parte reale negativa*; il gruppo stesso sia inoltre *invariante per coniugio*. Posto

$$\lambda_i = \prod_{r=1}^{n}{}^{(i)} (\rho_i - \rho_r)^{-1} \quad , \quad \lambda^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 , \tag{1.1}$$

$$\max_{i=1,\cdots,n} \operatorname{Re}(\rho_i) = -\rho , \qquad (\rho > 0), \tag{1.2}$$

il dominio $E_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ è *l'iperellissoide* luogo dei punti $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ per i quali è soddisfatta la limitazione

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \rho_i^n + \sum_{k=1}^{n} \rho_i^{n-k} \xi_k \right|^2 \leq \frac{\rho^2}{\lambda^2} , \tag{1.3}$$

mentre il dominio $D_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ è analogamente definito dalla

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \lambda_i \left(\rho_i^n + \sum_{k=1}^{n} \rho_i^{n-k} \xi_k \right) \right| \leq \rho . \tag{1.4}$$

La (1.3) implica la (1.4) e perciò si ha

$$E_{\varrho_1 \cdots \varrho_n} \subseteq D_{\varrho_1 \cdots \varrho_n} . \tag{1.5}$$

Indichiamo con H_n la *varietà di Hurwitz* dello spazio R^n, cioè il luogo dei punti $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ per i quali il polinomio

$$\varphi(z) = z^n + \sum_{k=1}^{n} \xi_k z^{n-k} \tag{1.6}$$

risulta essere di Hurwitz. Con H_{n-1} sarà indicata l'analoga varietà del sottospazio R^{n-1} definito da $\xi_n = 0$, cioè il luogo dei punti $(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, 0)$ per cui $z^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k z^{n-1-k}$ è un polinomio di Hurwitz.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.
(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1965.

Scopo di questa Nota è dimostrare che sussistono le

$$(1.7) \qquad \bigcup_{\varrho_1 \cdots \varrho_n} E_{\varrho_1 \cdots \varrho_n} = H_n ,$$

$$(1.8) \qquad \bigcup_{\varrho_1 \cdots \varrho_n} D_{\varrho_1 \cdots \varrho_n} = H_n \cup H_{n-1} .$$

La (1.7) esprime che, *se* $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ *verifica la* (1.3) (*con certi* $\rho_1, \cdots, \rho_n$), *allora il polinomio* (1.6) *è un polinomio di Hurwitz, e viceversa.*

Analogamente la (1.8) esprime che, *se* $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ *verifica la* (1.4) (*con certi* $\rho_1, \cdots, \rho_n$), *allora il polinomio* (1.6) *è un polinomio di Hurwitz oppure è il prodotto di z per un polinomio di Hurwitz, e viceversa.*

2. Nel seguito diremo che un polinomio in z di grado n è *normalizzato* se è uguale a 1 il coefficiente di z^n.

Alla dimostrazione della (1.7) premettiamo il seguente

LEMMA. – *Fissati nel piano complesso* $n \geq 2$ *punti distinti* $\rho_1, \cdots, \rho_n$ (1) *e fatte le posizioni* (1.1), *per ogni polinomio* $P_{n-1}(z)$ *di grado* $n-1$ *e normalizzato, si ha*

$$(2.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} | P_{n-1}(\rho_i) |^2 \geq \frac{1}{\lambda^2} ,$$

valendo il segno di uguaglianza se e soltanto se

$$(2.2) \qquad P_{n-1}(z) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 (z-\rho_1) \cdots (z-\rho_{i-1})(z-\rho_{i+1}) \cdots (z-\rho_n) .$$

DIMOSTRAZIONE. – I numeri λ_i definiti in (1.1) verificano le $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i^k = \delta_{n-1,k}$, $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$, cosicché per ogni $P_{n-1}(z)$ sussiste la

$$(2.3) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{n-1}(\rho_i) = 1 .$$

Ne segue, per la disuguaglianza di Cauchy

$$1 = \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{n-1}(\rho_i) \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} | P_{n-1}(\rho_i) |^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} | P_{n-1}(\rho_i) |^2$$

ossia la (2.1). Può valere il segno di uguaglianza soltanto se i numeri $P_{n-1}(\rho_i)$ sono proporzionali ai $\bar{\lambda}_i$. Detto c il fattore di proporzionalità, dalle $P_{n-1}(\rho_i) = c\bar{\lambda}_i$ e dalla (2.3) si trae $c = 1/\lambda^2$. Deve dunque essere $P_{n-1}(\rho_i) = \bar{\lambda}_i/\lambda^2$ ed allora, applicando la formula d'interpolazione di Lagrange e tenendo conto dell'espressione (1.1) dei λ_i, si perviene alla (2.2) (che definisce evidentemente un polinomio normalizzato).

(1) In questo Lemma non sono necessarie su $\rho_1, \cdots, \rho_n$ le altre ipotesi poste nel n. 1.

Ciò premesso, veniamo alla

Dimostrazione della (1.7). – Il fatto che ogni punto di H_n appartenga ad uno almeno degli iperellissoidi $E_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ è già stato dimostrato in [1] (vedi § 2, teor. III, p. 27). Dimostriamo ora il viceversa e cioè che se (per certi $\rho_1, \cdots, \rho_n$) il punto $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ verifica la (1.3) che per (1.6) può anche scriversi

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi(\rho_i)|^2 \leq \frac{\rho^2}{\lambda^2}, \tag{2.4}$$

allora $\varphi(z)$ è un polinomio di Hurwitz.

Indicata con σ una qualsiasi delle radici di $\varphi(z)$ e posto $\varphi(z) = (z - \sigma) P_{n-1}(z)$, con $P_{n-1}(z)$ polinomio normalizzato di grado $n - 1$, la (2.4) diventa

$$\sum_{i=1}^{n} |\rho_i - \sigma|^2 |P_{n-1}(\rho_i)|^2 \leq \frac{\rho^2}{\lambda^2}. \tag{2.5}$$

Per provare la tesi occorre far vedere che da (2.5) segue $\mathrm{Re}(\sigma) < 0$. Tenuto conto che gli n numeri $P_{n-1}(\rho_i)$ non possono essere tutti nulli, cominciamo ad esaminare il caso in cui $n - 1$ fra essi valgono zero. Supposto per esempio $P_{n-1}(\rho_i) = 0$, $(i = 1, \cdots, n - 1)$, la (2.5) diventa $|\rho_n - \sigma|^2 |P_{n-1}(\rho_n)|^2 \leq \rho^2/\lambda^2$, mentre la (2.3) porge $P_{n-1}(\rho_n) = 1/\lambda_n$; ne segue $|\rho_n - \sigma|^2 \leq \rho^2 |\lambda_n|^2/\lambda^2 < \rho^2$ e quindi $|\rho_n - \sigma| < \rho$. Questa, assieme alla $\mathrm{Re}(\rho_n) \leq -\rho$, implica appunto $\mathrm{Re}(\sigma) < 0$.

Esaminiamo ora il caso opposto in cui *son diversi da zero almeno due fra i numeri* $P_{n-1}(\rho_i)$.

Ragioniamo per assurdo, supponendo $\mathrm{Re}(\sigma) \geq 0$. Da questa e dalla $\mathrm{Re}(\rho_i) \leq -\rho$ seguirebbe $|\rho_i - \sigma| \geq \rho$, *il segno di uguaglianza potendo sussistere al più per un valore dell'indice i.*

I due fatti ora menzionati implicherebbero evidentemente la

$$\sum_{i=1}^{n} |\rho_i - \sigma|^2 |P_{n-1}(\rho_i)|^2 > \rho^2 \sum_{i=1}^{n} |P_{n-1}(\rho_i)|^2$$

che, assieme alla (2.5), fornirebbe

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{n-1}(\rho_i)|^2 < \frac{1}{\lambda^2};$$

ma ciò è assurdo, in virtù del precedente Lemma.

3. Esponiamo ora la

Dimostrazione della (1.8). – Cominciamo col provare che ogni punto di $H_n \cup H_{n-1}$ appartiene ad uno almeno dei dominii $D_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ (2). Se il punto considerato appartiene a H_n, l'affermazione segue subito da (1.7) e (1.5). Esa-

(2) È quasi superfluo osservare che H_n e H_{n-1} non hanno punti comuni.

miniamo l'altro caso in cui $(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, 0) \in H_{n-1}$, vale a dire in cui il polinomio (1.6) ha la forma

$$\varphi(z) = z(z - \sigma_1) \cdots (z - \sigma_{n-1}), \tag{3.1}$$

con $\mathrm{Re}(\sigma_i) < 0$ ed il gruppo $(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1})$ invariante per coniugio. Posto $\max \mathrm{Re}(\sigma_i) = -\sigma$ (con $\sigma > 0$) e fissato ρ in modo che sia $0 < \rho < \sigma$, assumiamo per i parametri $\rho_1, \cdots, \rho_n$ i valori seguenti

$$\rho_1 = \sigma_1, \cdots, \rho_{n-1} = \sigma_{n-1} \quad , \quad \rho_n = -\rho, \tag{3.2}$$

con che son soddisfatte tutte le condizioni del n. 1, risultando $\max \mathrm{Re}(\rho_i) = -\rho$. Si riconosce allora che il punto $(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, 0)$ appartiene al dominio $D_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ che corrisponde ai parametri (3.2), in quanto risulta soddisfatta la (1.4) col segno di uguaglianza. Si ha infatti, facendo uso della posizione (1.6) e tenendo presenti le (3.1), (3.2) e (1.1):

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i \varphi(\rho_i)| = |\lambda_n \varphi(\rho_n)| = |\lambda_n \rho_n (\rho_n - \sigma_1) \cdots (\rho_n - \sigma_{n-1})| =$$

$$= |\lambda_n \rho_n (\rho_n - \rho_1) \cdots (\rho_n - \rho_{n-1})| = \left| \lambda_n \rho_n \frac{1}{\lambda_n} \right| = |\rho_n| = \rho.$$

Dimostriamo ora il viceversa e cioè che, se (per certi $\rho_1, \cdots, \rho_n$) il punto $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ verifica la (1.4) ossia la

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i \varphi(\rho_i)| \leq \rho, \tag{3.3}$$

allora $\varphi(z)$ o è un polinomio di Hurwitz oppure è il prodotto di z per un polinomio di Hurwitz (di grado $n-1$).

Detta σ una qualsiasi radice di $\varphi(z)$ e posto $\varphi(z) = (z - \sigma) P_{n-1}(z)$, con $P_{n-1}(z)$ polinomio normalizzato di grado $n - 1$, la (3.3) diventa

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i (\rho_i - \sigma) P_{n-1}(\rho_i)| \leq \rho; \tag{3.4}$$

si tratta di far vedere che da questa segue o $\mathrm{Re}(\sigma) < 0$ oppure $\sigma = 0$ e $P_{n-1}(z)$ polinomio di Hurwitz.

Come nel n. 2 cominciamo ad esaminare il caso in cui sia $P_{n-1}(\rho_i) = 0$, $(i = 1, \cdots, n - 1)$ e di conseguenza $P_{n-1}(\rho_n) = 1/\lambda_n$. Si ha allora

$$\varphi(z) = (z - \sigma)(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_{n-1}), \tag{3.5}$$

mentre la (3.4) si riduce alla

$$|\rho_n - \sigma| \leq \rho, \tag{3.6}$$

che, assieme alla $\mathrm{Re}(\rho_n) \leq -\rho$, permette di dedurre $\mathrm{Re}(\sigma) \leq 0$. Se $\mathrm{Re}(\sigma) < 0$ la tesi è provata e rimane da esaminare l'eventualità $\mathrm{Re}(\sigma) = 0$. Poiché il polinomio (3.5) deve essere a coefficienti reali, due casi appaiono possibili: I) σ non è reale ed è il coniugato di uno dei numeri $\rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$; II) σ è reale ed il gruppo $(\rho_1, \cdots, \rho_{n-1})$ è invariante per coniugio. Date le ipotesi $\operatorname{Re}(\sigma) = 0$, $\operatorname{Re}(\rho_i) \leq -\rho$, il caso I non può verificarsi, mentre il caso II può verificarsi soltanto se $\sigma = 0$ (3). In tal caso la (3.5) mostra che $\varphi(z)$ è il prodotto di z per un polinomio che è evidentemente di Hurwitz.

Ci rimane da considerare *il caso in cui si ha* $P_{n-1}(\rho_i) \neq 0$ *per almeno due valori dell'indice i.*

È allora certamente $\operatorname{Re}(\sigma) < 0$ perché se fosse $\operatorname{Re}(\sigma) \geq 0$ si avrebbe, in forza dell'ipotesi testè ammessa, della $|\rho_i - \sigma| \geq \rho$ (*col segno* $=$ *al più per un valore dell'indice i*) e della (2.3):

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i (\rho_i - \sigma) P_{n-1}(\rho_i)| > \rho \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i P_{n-1}(\rho_i)| \geq \rho \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{n-1}(\rho_i) \right| = \rho ,$$

ciò che, assieme alla (3.4), conduce all'assurdo $\rho > \rho$.

4. La dimostrazione esposta nel n. precedente, accompagnata dalla osservazione della nota (3), mostra evidentemente che sussiste la seguente proprietà: *un dominio* $D_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ *può avere punti comuni coll'iperpiano* $\xi_n = 0$ *soltanto se uno dei numeri* $\rho_1, \cdots, \rho_n$ *è uguale a* $-\rho$ (*per esempio* $\rho_n = -\rho$); *in tal caso si ha un solo punto comune* $(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, 0)$ *che è definito dall'identità*

$$(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_{n-1}) = z^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k z^{n-1-k} .$$

5. Concludiamo mostrando per quale ragione si è ritenuto opportuno dimostrare le (1.7), (1.8).

Considerata l'equazione differenziale lineare omogenea, a coefficienti costanti

$$x^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \xi_k x^{(n-k)}(t) = 0 ,$$

è ben noto che l'ipotesi $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in H_n$ [oppure $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in H_n \cup H_{n-1}$] assicura la stabilità (per $t \to +\infty$) di tutti i suoi integrali. Tale ipotesi può, in base a (1.7) [o (1.8)], essere sostituita da quest'altra: il punto $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ appartiene ad uno dei dominii $E_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ [oppure $D_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$].

Sotto quest'ultima forma il criterio di stabilità rimane valido per una equazione a coefficienti variabili, localmente sommabili in $(a, +\infty)$:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t) x^{(n-k)}(t) = 0 ,$$

nel senso che tutti i suoi integrali sono certamente stabili se, per t abbastanza grande, la curva $\xi_k = \xi_k(t)$, $(k = 1, \cdots, n)$, risulta contenuta in uno dei dominii $E_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$ [oppure $D_{\varrho_1 \cdots \varrho_n}$]. Ciò è dimostrato in [1]; altri risultati più generali, validi anche per equazioni non omogenee, sono dati in [2], [3].

(3) Si noti che da $\sigma = 0$, $\operatorname{Re}(\rho_n) \leq -\rho$ e dalla (3.6) segue necessariamente $\rho_n = -\rho$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. GHIZZETTI, *Formule di maggiorazione e criteri sufficienti di stabilità per gli integrali di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n*, «Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei», ser. VIII, vol. VII, sezione Iª, fasc. 2 (1963).

[2] A. GHIZZETTI, *Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », ser. II, tomo XIII, fasc. II (1964).

[3] A. GHIZZETTI, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie e criteri di stabilità*, NATO Advanced Study Institute on *Stability Problems of solutions of differential equations*, Padova, 6–18 settembre 1965 (volume in corso di stampa).

SUMMARY. — The Hurwitz variety in R^n is defined as the set H_n of those points $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ for which the polynomial $z^n + \sum_{k=1}^{n} \xi_k z^{n-k}$ has all roots with negative real part. As is shown here, H_n coincides with the union of the sets of an n–parameter family of n–dimensional ellipsoids. The same holds true for $H_n \cup H_{n-1}$ with respect to another n–parameter family of n–dimensional domains.