Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Louis Castagnetto

Dimostrazione elementare di un teorema del Tricomi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.6, p. 413–417.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_6_413_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Dimostrazione elementare di un teorema del Tricomi.* Nota di LOUIS CASTAGNETTO, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

1. Il Tricomi, in questi stessi «Atti» (6) *25*, 416–421 (1937), ha dimostrato la relazione

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n\alpha} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (n\alpha)^k = \begin{cases} 1 & \alpha < 1 \\ \frac{1}{2} & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha > 1 . \end{cases} \tag{1}$$

L'elegante dimostrazione del Tricomi si basa sulla formola di inversione di Stieltjes–Post–Widder [1], e non può pertanto dirsi elementare. In vista dell'interesse di questo risultato, non è forse fuori di luogo registrare una dimostrazione diretta e completamente elementare (ma naturalmente più lunga) della (1). Questo è il principale scopo della presente Nota, che contiene pure qualche conseguenza della (1).

2. Consideriamo prima il caso $\alpha = 1$. Abbiamo

$$e^n = 1 + \frac{n}{1!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^n (n-x)^n e^x \, dx . \tag{2}$$

Ma

$$\int_0^n (n-x)^n e^x \, dx = e^n n^{n+1} \int_0^1 e^{-nt} t^n \, dt . \tag{3}$$

Da (2) e (3) risulta

$$\frac{1 + \frac{n}{1!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}}{e^n} = 1 - \frac{n^{n+1} e^{-n}}{n!} \int_0^1 e^{-n[t-1-\mathrm{L}t]} \, dt . \tag{4}$$

Si tratta dunque di calcolare il limite del secondo termine del secondo membro di (4).

Lo sviluppo limitato di Taylor nella vicinanza di $t = 1$ della funzione $y(t) = t - 1 - \mathrm{L}\,t$ è (se si tiene conto che $y(1) = y'(1) = 0$; $y''(1) = 1$)

$$y(t) = t - 1 - \mathrm{L}t = \frac{(1-t)^2}{2} + (1-t)^3 r(t) . \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1965.

(1) Cfr. lettera N° 383 (di Stieltjes a Hermite), *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, *2*, p. 332 (Paris, Gauthier–Villars, 1905); E. L. POST, «Trans. Am. Math. Soc.», *32*, 723–781 (1930); D. V. WIDDER, «Trans. Am. Math. Soc.», *36*, 107–200 (1934).

Se poniamo adesso $z(t) = t - 1 - \mathrm{L}t - \frac{(1-t)^2}{2}$

(6) $$z(0) = \infty \ , \ z(1) = 0 \ ; \quad \text{e pertanto} \quad z(t) \geq 0$$

$$z'(t) = -\frac{(1-t)^2}{2} < 0 ,$$

concludiamo che si verifica

(7) $$t - 1 - \mathrm{L}t \geq \frac{(t-1)^2}{2} \qquad t \in [0 \ , 1] .$$

D'altronde è $r(1) = \frac{1}{3}$, $r'(1) = -\frac{1}{4}$; pertanto esistono due costanti c_1, c_2 tali che, in un intorno di $t = 1$, ha luogo la formola

(8) $$c_1 < r(t) < c_2 .$$

Da (5) e (7) si ricava

(9) $$c_1(1-t)^3 < t - 1 - \mathrm{L}t - \frac{(1-t)^2}{2} < c_2(1-t)^3 ,$$

$$e^{-n\left[\frac{(1-t)^2}{2} + c_2(1-t)^3\right]} < e^{-n[t-1-\mathrm{L}t]} < e^{-n\left[\frac{(1-t)^2}{2} + c_1(1-t)^3\right]} .$$

3. Sia $0 < \varepsilon < 1$; tenendo conto di (6) e (7) otteniamo

(10) $$\int_0^{1-\varepsilon} e^{-n[t-1-\mathrm{L}t]}\, dt < (1-\varepsilon)\left[e^{-n(t-1-\mathrm{L}t)}\right]_{t=1-\varepsilon} < e^{-\frac{n}{2}\varepsilon^2} ;$$

e da (9), integrando, si ricava

(11) $$\int_{1-\varepsilon}^{1} e^{-n\left[\frac{(1-t)^2}{2} + c_2(1-t)^3\right]} dt < \int_{1-\varepsilon}^{1} e^{-n[t-1-\mathrm{L}t]} dt < \int_{1-\varepsilon}^{1} e^{-n\left[\frac{(1-t)^2}{2} + c_1(1-t)^3\right]} dt .$$

Con un cambiamento di variabile $1 - t = u\sqrt{2/n}$, si conclude che il primo ed il terzo integrale di (11) sono della forma

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{n/2}} e^{-u^2} e^{-\frac{cu^3}{\sqrt{n}}}\, du ,$$

dove

(12) $$c > 0 .$$

Ma

(13) $$\int_0^{\varepsilon\sqrt{n/2}} e^{-u^2} e^{-\frac{cu^3}{\sqrt{n}}}\, du = \int_0^{\varepsilon\sqrt{n/2}} e^{-u^2}\left[e^{-\frac{cu^3}{\sqrt{n}}} - 1\right] du + \int_0^{\varepsilon\sqrt{n/2}} e^{-u^2}\, du .$$

D'altronde

$$(14)\qquad \left|\int_0^{\varepsilon\sqrt{n/2}} e^{-u^2}\left(e^{-\frac{cu^3}{\sqrt{n}}}-1\right)du\right| < \int_0^{\varepsilon\sqrt{n/2}}\left(1-e^{-\frac{cu^3}{\sqrt{n}}}\right)du < \left(1-e^{-\frac{c}{2\sqrt{2}}n\varepsilon^3}\right)\varepsilon\sqrt{\frac{n}{2}}\,.$$

Poniamo ora $\varepsilon = n^{-p/q}$, ed imponiamo le condizioni

$$(15)\qquad \varepsilon\sqrt{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty \quad , \quad n\varepsilon^3\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Si vede senza difficoltà che la prima delle (15) esige $q > 2p$ e la seconda $3p > q$, ossia

$$2p < q < 3p\,;$$

e questa disuguaglianza è verificata, per esempio, se $p = 2$, $q = 5$.

Con questa scelta di p e q, si ricava

$$(16)\qquad \left(1-e^{-\frac{c}{2\sqrt{2}}n\varepsilon^3}\right)\varepsilon\sqrt{\frac{n}{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e, da (16) e (13)

$$(17)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon\sqrt{n/2}} e^{-u^2}e^{-\frac{cu^3}{\sqrt{n}}}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Da (17) e (11) ricaviamo

$$(18)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1-\varepsilon}^{1} e^{-n[t-1-\mathrm{L}t]}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

D'altronde, dalla prima delle (15) e dalla (10) otteniamo

$$(19)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} e^{-n[t-1-\mathrm{L}t]}\,dt = 0\,,$$

ossia, da (18) e (19),

$$(20)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^{1} e^{-n[t-1-\mathrm{L}t]}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Da (20), (12), (3) e (4) e dalla formola di Stirling si ha infine

$$(22)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 e^{-nt}t^n\,dt = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-n}\sqrt{\frac{2}{n}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

che dimostra la (1), per il caso $\alpha = 1$.

Passiamo adesso al caso $\alpha \neq 1$. Abbiamo

$$e^{n\alpha} = 1 + \frac{n\alpha}{1!} + \cdots + \frac{(n\alpha)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^{n\alpha} (n\alpha - t)^n e^t \, dt ,$$

ossia

$$\frac{1 + \frac{n\alpha}{1!} + \cdots + \frac{(n\alpha)^n}{n!}}{e^{n\alpha}} = 1 - \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{\alpha} e^{-nv} v^n \, dv . \tag{23}$$

Se $\alpha < 1$, abbiamo già visto (formola (10)), che il secondo termine del secondo membro di (22) ha limite nullo.

Se $\alpha > 1$ scriviamo

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{\alpha} e^{-nv} v^n \, dv = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{1} e^{-nv} v^n \, dv + \frac{n^{n+1}}{n!}\int_1^{\alpha} e^{-nv} v^n \, dv . \tag{24}$$

Abbiamo già visto che il primo termine del secondo membro ha per limite $1/2$ (formola (22)); e partendo dalla (9) si dimostra, in maniera perfettamente analoga, che l'ultimo termine della (4) ha per limite $1/2$; ossia che il secondo termine del secondo membro della (23) ha per limite zero. Con ciò la (1) è pienamente dimostrata.

4. Faremo, per concludere, un'applicazione della formola (1). Il Källen, in un recente interessante lavoro (*Consistency problems in quantum electrodynamics*, Cern, Theoretical Study Division, Genève, 1957, publication 57–43), afferma che è valida la formola (loc. cit., p. 24)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n\alpha)^\nu}{\nu!}\left[\frac{1}{1+\frac{n^2}{\nu^4}}\right]^\nu}{e^{\alpha n}} = 1 . \tag{25}$$

Vediamo, come conseguenza facile della (1), che questa formola è soltanto valida se $\alpha < 1$.

Infatti, si dimostra che vale la formola $(0 \leq \alpha < \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n\alpha)^\nu}{\nu!}\left[\frac{1}{1+\frac{n^2}{\nu^4}}\right]^\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n\alpha)^\nu}{\nu!}} = 1 ;$$

ossia, moltiplicando e dividendo il denominatore per $e^{\alpha n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n\alpha)^\nu}{\nu!}\left[\frac{1}{1+\frac{n^2}{\nu^4}}\right]^\nu}{e^{\alpha n}} \cdot \frac{e^{\alpha n}}{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n\alpha)^\nu}{\nu!}} = 1 ;$$

onde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{(n\alpha)^\nu}{\nu!}\left[\frac{1}{1+\frac{n^2}{\nu^4}}\right]^\nu}{e^{\alpha n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{(n\alpha)^\nu}{\nu!}}{e^{\alpha n}} .$$

Se si tiene conto della (1) otteniamo finalmente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{(n\alpha)^\nu}{\nu!}\left[\frac{1}{1+\frac{n^2}{\nu^4}}\right]^\nu}{e^{\alpha n}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 1 \\ 1 & \text{se } 0 \leq \alpha < 1 , \end{cases}$$

che dimostra, in particolare, la validità della (25) se è $0 \leq \alpha < 1$.

SUMMARY. — Tricomi's formula (1) is proved in an elementary way and some consequences are obtained.