
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ENZO MARTINELLI

Metriche hermitiane sulle varietà a struttura quasi quaternionale generalizzata

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 39 (1965), n.6, p. 400–407.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_6_400_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Metriche hermitiane sulle varietà a struttura quasi quaternioniale generalizzata.* Nota (*) del Corrisp. ENZO MARTINELLI.

Scopo di questa Nota è quello di dare una caratterizzazione geometrica intrinseca, nel senso che sarà precisato, delle metriche hermitiane sopra una varietà a struttura quasi quaternioniale generalizzata (1).

Sia M_{4n} una tale varietà e V_{4n} lo spazio vettoriale sul campo reale $\mathbb{R}$, tangente ad M_{4n} in un suo punto qualunque.

Se la struttura quasi quaternioniale di M_{4n} non fosse generalizzata, entro ogni V_{4n} riuscirebbe univocamente definita una struttura di spazio vettoriale $\mathcal{V}_n^{\mathbb{Q}}$ sul corpo dei quaternioni $\mathbb{Q}$ (algebra dei quaternioni su $\mathbb{R}$). Nel caso attuale di struttura generalizzata, in V_{4n} restano invece definite infinite strutture $\mathcal{V}_n^{\mathbb{Q}}$ ammissibili, differenti tra loro per automorfismi interni del corpo degli scalari $\mathbb{Q}$. Ciò nondimeno riescono canonicamente definiti in V_{4n} certi sottospazi $V_4^{(c)}$, immagini di $\mathcal{V}_1^{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{V}_n^{\mathbb{Q}}$, che chiamo *faccette caratteristiche* quaternionali. E su ogni $V_4^{(c)}$ resta canonicamente definita una metrica conforme euclidea, che dico *metrica conforme intrinseca* di $V_4^{(c)}$, in quanto essa è determinata dalla sola struttura quasi quaternioniale generalizzata di M_{4n} .

Ebbene, proverò che una metrica hermitiana su M_{4n} può caratterizzarsi come una *metrica riemanniana su M_{4n} subordinante la metrica conforme intrinseca su ogni faccetta caratteristica*.

Un analogo risultato aveva già dato in [2] e [3] per le varietà a struttura complessa e quasi complessa, stabilendolo rapidamente mediante l'uso di riferimenti isotropi. Una simile strada non può qui venire seguita, né sembra praticabile l'uso di riferimenti generali. Perciò dimostrerò l'attuale risultato con procedimento intrinseco, che si giova appunto di una caratterizzazione intrinseca formale delle forme quadratiche hermitiane sul corpo $\mathbb{Q}$ (o, in particolare, sul corpo complesso $\mathbb{C}$), analoga a quella nota per le forme quadratiche su $\mathbb{R}$, e che forse non è priva, di per se, di qualche interesse.

1. RICHAMI E PREMESSE. — Consideriamo $\mathbb{R}^{4n}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}^n$ come spazio vettoriale destro su $\mathbb{Q}$.

Siano $L_{4n}, L_n^{\mathbb{Q}}$ i gruppi lineari degli automorfismi rispettivamente di $\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{Q}^n$. Il gruppo $L_n^{\mathbb{Q}}$ si amplia in un gruppo $\tilde{L}_n^{\mathbb{Q}}$ di trasformazioni semi-lineari di $\mathbb{Q}^n$, che ho chiamato *gruppo lineare generalizzato*. Una trasformazione $\tilde{\sigma}_{A,q} \in \tilde{L}_n^{\mathbb{Q}}$ si ottiene componendo l'automorfismo $\sigma_A \in L_n^{\mathbb{Q}}$ (definito dalla ma-

(*) Presentata nella seduta dell'11 dicembre 1965.

(1) Tali varietà sono state da me considerate in [4], nonché in [5] dove ne è approfondito un esempio. Una esposizione sommaria con qualche complemento trovasi in [6].

trice quadrata A su $\mathcal{Q}$, d'ordine n , invertibile) con l'omotetia ω_q di rapporto $q \in \mathcal{Q} - 0$:

$$(1.1) \quad \tilde{\sigma}_{A,q} = \omega_q \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \omega_q.$$

È ovvio che si ottiene lo stesso gruppo $\tilde{L}_n^{\mathcal{Q}}$ se ci si limita a considerare – come sempre faremo – le ω_q con $|q| = 1$, che diremo *omotetie unitarie*.

Ogni σ_A lascia inalterata la struttura di spazio vettoriale destro su $\mathcal{Q}$ attribuita a $\mathcal{Q}^n$, invece una $\tilde{\sigma}_{A,q}$ altera tale struttura per la presenza della omotetia unitaria ω_q . Precisamente ω_q – e allo stesso modo $\tilde{\sigma}_{A,q}$, a cagione di (1.1) – altera l'operazione di moltiplicazione a destra di $x \in \mathcal{Q}^n$ per $\lambda \in \mathcal{Q}$ secondo la:

$$(1.2) \quad \omega_q(x\lambda) = \omega_q(x) \bar{q} \lambda q \quad (\bar{q}q = 1).$$

Ciò si esprime dicendo che ω_q e $\tilde{\sigma}_{A,q}$ sono trasformazioni semi-lineari di $\mathcal{Q}^n$ relative all'automorfismo interno $\alpha_q: \lambda \rightarrow \bar{q} \lambda q$ del corpo degli scalari $\mathcal{Q}$.

Identificando come al solito $\mathcal{Q}^n(x^\alpha)$ (dove $x^\alpha = x^0 + ix^1 + jx^2 + kx^3$; $\alpha = 1, \dots, n$) ad $\mathbb{R}^{4n}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $\mathbb{R}^{4n}$ viene a dotarsi di struttura di spazio vettoriale destro su $\mathcal{Q}$, ed $L_n^{\mathcal{Q}}, \tilde{L}_n^{\mathcal{Q}}$ si identificano entrambi a sottogruppi di L_{4n} . Ma, in base a quanto si è detto or ora, $L_n^{\mathcal{Q}}$ non altera tale struttura, mentre $\tilde{L}_n^{\mathcal{Q}}$ la altera per automorfismi interni del corpo degli scalari $\mathcal{Q}$.

Sia M_{4n} una varietà differenziale reale di dimensione $4n$ e $T(M_{4n}, \mathbb{R}^{4n}, L_{4n}, H)$ lo spazio fibrato dei vettori tangenti alla varietà, dove H denota il fibrato principale associato i cui elementi sono gli omeomorfismi h_z di $\mathbb{R}^{4n}$ sullo spazio vettoriale tangente T_z ad M_{4n} in un punto z variabile sulla varietà.

Diciamo che M_{4n} è dotata di *struttura quasi quaternionale generalizzata* quando è assegnato un fibrato subordinato al fibrato tangente, $T(M_{4n}, \mathbb{R}^{4n} \equiv \mathcal{Q}^n, \tilde{L}_n^{\mathcal{Q}}, \tilde{H})$, avente per gruppo strutturale $\tilde{L}_n^{\mathcal{Q}} \subset L_{4n}$ e per fibrato principale associato $\tilde{H} \subset H$. Se $\tilde{h}_z$ è un omeomorfismo elemento di $\tilde{H}$, ogni altro omeomorfismo $\tilde{h}'_z$ elemento di $\tilde{H}$ che rappresenta $\mathbb{R}^{4n}$ su T_z è dato da:

$$(1.3) \quad \tilde{h}'_z = \tilde{h}_z \circ \tilde{\sigma}_{A,q},$$

al variare di $\tilde{\sigma}_{A,q}$ in $\tilde{L}_n^{\mathcal{Q}}$.

Mediante un fissato omeomorfismo $\tilde{h}_z$ le strutture di $\mathbb{R}^{4n}$ e $\mathcal{Q}^n$ si trasportano su T_z in strutture V_{4n} e $\mathcal{V}_n^{\mathcal{Q}}$ rispettivamente di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e di spazio vettoriale destro su $\mathcal{Q}$. Se ora si cambia $\tilde{h}_z$ in un altro omeomorfismo $\tilde{h}'_z$ espresso dalla (1.3), la struttura V_{4n} non cambia (perché $L_n^{\mathcal{Q}} \subset L_{4n}$), mentre la struttura $\mathcal{V}_n^{\mathcal{Q}}$ cambia allo stesso modo come cambia la struttura di $\mathcal{Q}^n$ per la trasformazione $\tilde{\sigma}_{A,q}$. Cioè la nuova struttura $\mathcal{V}'_n^{\mathcal{Q}}$ che $\tilde{h}'_z$ trasporta su T_z si ottiene dalla struttura $\mathcal{V}_n^{\mathcal{Q}}$ con l'automorfismo interno $\lambda \rightarrow \bar{q} \lambda q$ del corpo degli scalari $\mathcal{Q}$.

Si hanno dunque su T_z infinite strutture diverse di spazio vettoriale destro su $\mathcal{Q}$, che si diranno *ammissibili* per la M_{4n} .

Le proprietà di T_s che è lecito considerare per una M_{4n} a struttura quasi quaternionale generalizzata, sono naturalmente soltanto quelle comuni a tutte le strutture ammissibili di spazio vettoriale destro su $\mathcal{Q}$ di cui resta dotato T_s .

2. METRICA CONFORME INTRINSECA SU UNA FACSETTA CARATTERISTICA. - Nello spazio tangente $T_s = V_{4n}$ fissiamo una struttura ammissibile $\mathfrak{V}_n^{\mathcal{Q}}$. Un vettore non nullo $x_1 \in V_{4n} \equiv \mathfrak{V}_n^{\mathcal{Q}}$ individua una retta $\mathfrak{V}_1^{\mathcal{Q}} = [x_1] = \{x_1 \lambda\}_{\lambda = \overset{0}{\lambda} + \overset{1}{i}\lambda + \overset{2}{j}\lambda + \overset{3}{k}\lambda \in \mathcal{Q}} \subset \mathfrak{V}_n^{\mathcal{Q}}$, la quale ha per immagine (ovvero, si identifica con) un sottospazio

$$V_4^{(c)} = [x_1, x_1 i, x_1 j, x_1 k] = \{x_1 \lambda + x_1^1 \lambda + x_1^2 j \lambda + x_1^3 k \lambda\}_{\substack{0 \ 1 \ 2 \ 3 \\ \lambda, \lambda, \lambda, \lambda \in \mathcal{R}}} \subset V_{4n},$$

che diciamo *faccetta caratteristica* quaternionale di T_s .

La definizione è legittima perché un automorfismo α_q porta il vettore $x_1 \lambda$ nel vettore $x_1 \bar{q} \lambda q$ che appartiene ancora ad $[x_1]$.

Sia $x = x_1 \lambda$ un vettore di $V_4^{(c)}$. La forma quadratica

$$(2.1) \quad f: x \rightarrow |\lambda|^2 = \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2$$

definisce una metrica euclidea in $V_4^{(c)}$.

Tale metrica non si altera per automorfismi α_q , perché $|\bar{q} \lambda q| = |\lambda|$; tuttavia, non essendo fissata una base x_1 di $V_n^{\mathcal{Q}}$, essa riesce determinata soltanto a meno di un fattore di proporzionalità reale > 0 . Infatti, eseguendo il cambiamento di base $x_1 = x'_1 a$ ($a \in \mathcal{Q} - 0$), si ha: $x = x'_1 a \lambda = x'_1 \lambda'$; e l'analoga forma quadratica $f': x \rightarrow |\lambda'|^2$ risulta espressa da $f' = |a|^2 f$.

Si ha dunque che:

TEOREMA 1. - *Su ogni faccetta caratteristica tangente ad una M_{4n} a struttura quasi quaternionale generalizzata resta canonicamente definita una metrica conforme euclidea.*

La diremo *metrica conforme intrinseca* della faccetta caratteristica.

3. FORME SESQUILINEARI HERMITIANE E FORME QUADRATICHE HERMITIANE SUL CORPO $\mathcal{Q}$. - Prima di procedere sono opportuni alcuni richiami e alcune osservazioni.

Ricordiamo in primo luogo (cfr. Bourbaki, [1]) che una *forma quadratica* su uno spazio vettoriale reale V_{4n} può definirsi intrinsecamente come una applicazione $\hat{F}: V_{4n} \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente alle condizioni:

$$(Q\ 1) \quad \hat{F}(xr) = r^2 \hat{F}(x), \text{ per ogni } x \in V_{4n} \text{ e ogni } r \in \mathbb{R};$$

$$(Q\ 2) \quad \text{l'applicazione, definita su } V_{4n} \times V_{4n},$$

$$\hat{\Phi}: (x, y) \rightarrow \frac{1}{2} [\hat{F}(x+y) - \hat{F}(x) - \hat{F}(y)]$$

è una forma bilineare simmetrica su V_{4n} (forma bilineare associata ad $\hat{F}$).

Ricordiamo poi che una *forma sesquilineare hermitiana* su $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$ può definirsi come una applicazione $\Phi : \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}} \times \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}} \rightarrow \mathfrak{Q}$ soddisfacente alle condizioni:

$$(SH_1) \quad \Phi(x + x', y) = \Phi(x, y) + \Phi(x', y), \quad \Phi(x, y + y') = \Phi(x, y) + \Phi(x, y'),$$

$$(SH_2) \quad \Phi(x\lambda, y) = \bar{\lambda} \Phi(x, y), \quad \Phi(x, y\lambda) = \Phi(x, y)\lambda,$$

$$(SH_3) \quad \Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)},$$

per ogni $x, y, x', y' \in \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$ e ogni $\lambda \in \mathfrak{Q}$.

Se $x = e_\alpha x^\alpha, y = e_\beta y^\beta$ (con (e_α) base di $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$), si ottiene subito l'ordinaria espressione esplicita $\Phi(x, y) = \bar{x}^\alpha g_{\alpha\beta} y^\beta$, essendo $g_{\alpha\beta} = \Phi(e_\alpha, e_\beta) \in \mathfrak{Q}$ soddisfacenti alla: $g_{\beta\alpha} = \bar{g}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$).

Diremo *forma quadratica* ⁽²⁾ *hermitiana* su $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$ associata a Φ , l'applicazione $F: \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}} \rightarrow \mathfrak{R}$ definita dalla:

$$(3.1) \quad F(x) = \Phi(x, x) \quad \text{per ogni } x \in \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}.$$

Ci servirà però di dare una definizione generale, *intrinseca e indipendente da una preassegnata Φ* , di una forma quadratica hermitiana, analogamente a quello che si fa per una forma quadratica mediante le (Q 1, 2).

A tale scopo osserviamo che, essendo $F(x)$ reale, dalla (SH₂) segue:

$$(3.2) \quad F(x\lambda) = \bar{\lambda} F(x) \lambda = |\lambda|^2 F(x).$$

Risulta poi, in base a (SH 1, 2, 3):

$$F(x + y) = F(x) + F(y) + \Phi(x, y) + \overline{\Phi(x, y)},$$

cioè:

$$(3.3) \quad \operatorname{Re} \Phi(x, y) = \frac{1}{2} [F(x + y) - F(x) - F(y)].$$

Ponendo nella (3.3) in luogo di x successivamente xi, xj, xk e tenendo conto di (3.2), viene:

$$\operatorname{Re} \Phi(xi, y) = -\operatorname{Re} [i\Phi(x, y)] = \frac{1}{2} [F(xi + y) - F(x) - F(y)]$$

$$\operatorname{Re} \Phi(xj, y) = -\operatorname{Re} [j\Phi(x, y)] = \frac{1}{2} [F(xj + y) - F(x) - F(y)]$$

$$\operatorname{Re} \Phi(xk, y) = -\operatorname{Re} [k\Phi(x, y)] = \frac{1}{2} [F(xk + y) - F(x) - F(y)].$$

Ora, per ogni quaternione $a = \overset{0}{a} + \overset{1}{i}a + \overset{2}{j}a + \overset{3}{k}a$ si ha: $\overset{0}{a} = \operatorname{Re}(a)$, $\overset{1}{a} = -\operatorname{Re}(ia)$, $\overset{2}{a} = -\operatorname{Re}(ja)$, $\overset{3}{a} = -\operatorname{Re}(ka)$, e quindi:

$$(3.4) \quad a = \operatorname{Re}(a) - i \operatorname{Re}(ia) - j \operatorname{Re}(ja) - k \operatorname{Re}(ka).$$

(2) Il termine « quadratica » risulta giustificato dal fatto che $F(x)$ si esprime come una forma quadratica ordinaria nelle componenti reali delle coordinate quaternionali di x .

Se ne trae:

$$(3.5) \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{2} [F(x + y) + iF(xi + y) + jF(xj + y) + kF(xk + y) - (1 + i + j + k)(F(x) + F(y))].$$

Ciò posto, è spontaneo definire in generale una forma quadratica hermitiana su $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$ come una applicazione $F: \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}} \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente alle condizioni:

$$(QH\ 1) \quad F(x\lambda) = |\lambda|^2 F(x) \text{ per ogni } x \in \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}} \text{ e ogni } \lambda \in \mathfrak{Q};$$

$$(QH\ 2) \quad \text{l'applicazione, definita su } \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}} \times \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}},$$

$$\Phi: (x, y) \rightarrow \frac{1}{2} [F(x + y) + iF(xi + y) + jF(xj + y) + kF(xk + y) - (1 + i + j + k)(F(x) + F(y))]$$

sia una forma sesquilineare hermitiana su $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$ ⁽³⁾.

La forma sesquilineare hermitiana Φ definita in (QH 2) si dirà *associata* alla F .

Ebbene, con le definizioni poste, sussiste il

LEMMA. - *Se la forma quadratica hermitiana F è associata alla forma sesquilineare hermitiana Φ , la Φ è associata alla F ; e viceversa.*

La parte diretta del Lemma si è già provata in quel che precede. Invero, data Φ , si è costruita la F associata mediante la (3.1), e le (3.2), (3.5) ci hanno mostrato che tale F soddisfa alle condizioni (QH 1, 2) che definiscono in generale una forma quadratica hermitiana, dove la forma sesquilineare associata a F coincide con la Φ di partenza.

Per provare la parte inversa, si parta da una forma quadratica hermitiana F e si consideri la forma sesquilineare hermitiana associata Φ . Si tratta di mostrare che $\Phi(x, x) = F(x)$.

Ed invero, tenuto conto di (QH 1), si ha:

$$\begin{aligned} \Phi(x, x) &= \frac{1}{2} [F(x \cdot 2) + iF(x(i + 1)) + jF(x(j + 1)) + \\ &\quad + kF(x(k + 1)) - 2(1 + i + j + k)F(x)] = \\ &= \frac{1}{2} [4 + i|i + 1|^2 + j|j + 1|^2 + k|k + 1|^2 - 2(1 + i + j + k)] F(x) = F(x). \end{aligned}$$

4. CARATTERIZZAZIONE DELLE METRICHE HERMITIANE QUATERNIONALI. - Una *metrica hermitiana* su una varietà M_{4n} a struttura quasi quaternionale generalizzata è definita da un campo continuo-differenziabile di forme qua-

(3) La definizione e le proprietà di cui appresso, sono valide ovviamente anche con riguardo al corpo complesso $\mathbb{C}$ in luogo di $\mathfrak{Q}$, sopprimendo i termini con j, k . Ho già avuto occasione di presentare queste considerazioni in un corso di Geometria superiore da me tenuto presso l'Università di Roma nel 1964-65 e apparso in edizione ciclostilata.

dratiche hermitiane su ogni spazio tangente T_z (z variabile su M_{4n}), rispetto ad una struttura $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$ ammissibile per T_z .

La definizione è corretta perché, come ora vedremo, essa è indipendente dalla struttura ammissibile che si assume per T_z .

Indichiamo con $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}'} lo spazio vettoriale che si ottiene da $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$ con l'automorfismo $\lambda \rightarrow \bar{q} \lambda q$ ($|q| = 1$) di $\mathfrak{Q}$, e proviamo prima che:$

a) Se Φ è una forma sesquilineare hermitiana su $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$, $\Phi' = q \Phi \bar{q}$ è una forma sesquilineare hermitiana su $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}'}$.

La Φ' s'intende definita assumendo $\Phi'(x, y) = q \Phi(x, y) \bar{q}$, per ogni $x, y \in \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}'} \equiv \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$. È allora ovvio, intanto, che la validità delle (SH 1,3) per Φ' segue dalla validità delle (SH 1,3) per Φ , tenuto conto che le operazioni di somma in $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}'}$ coincidono.

Per verificare che Φ' soddisfa anche la (SH 2) indichiamo per un momento con $\mathbf{1}, \mathbf{1}'$ le operazioni di moltiplicazione per uno scalare rispettivamente in $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}'}$. Si ha (per ogni $\lambda, \mu \in \mathfrak{Q}$):

$$\begin{aligned} \Phi'(x \mathbf{1}' \lambda, y \mathbf{1}' \mu) &= q \Phi(x \mathbf{1} \bar{q} \lambda q, y \mathbf{1} \bar{q} \mu q) \bar{q} \\ &= q \bar{q} \bar{\lambda} q \Phi(x, y) \bar{q} \mu q \bar{q} \\ &= q \bar{q} \bar{\lambda} q \Phi(x, y) \bar{q} \mu q \bar{q} \\ &= \bar{\lambda} q \Phi(x, y) \bar{q} \mu \\ &= \bar{\lambda} \Phi'(x, y) \mu, \end{aligned}$$

e la proposizione a) è completamente dimostrata.

Da a) segue subito che:

b) Se F è una forma quadratica hermitiana su $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$, essa è tale anche su $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}'}$.

Invero, in base al Lemma del n. 3, si ha in $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$: $F(x) = \Phi(x, x)$, essendo Φ la forma sesquilineare hermitiana associata a F . Allora la forma $\Phi' = \bar{q} \Phi q$ è sesquilineare hermitiana in $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}'}$, ed ivi la forma quadratica hermitiana F' associata è definita dalla: $F'(x) = \Phi'(x, x) = \bar{q} \Phi(x, x) q = \bar{q} F(x) q = F(x)$, onde coincide con F . Ciò prova b).

Dalla proposizione b) discende, come si era affermato, che la definizione posta di metrica hermitiana su M_{4n} è corretta.

Ora il concetto di metrica hermitiana rientra in quello di *metrica riemanniana (generale)* su M_{4n} . Ciò si riconosce ovviamente esplicitando la metrica in termini di coordinate di vettori in T_z (e può d'altronde stabilirsi anche intrinsecamente facendo uso delle condizioni (QH 1, 2) del n. 3).

È facile anche provare che una metrica hermitiana subordina, su ogni faccetta caratteristica tangente ad M_{4n} , la metrica conforme intrinseca (n. 2).

Infatti, sia F la forma quadratica hermitiana che esprime la metrica hermitiana su $T_z \equiv \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$, e $x = x_1 \lambda$ un vettore della faccetta caratteristica $\mathfrak{V}_1^{\mathfrak{Q}} = [x_1]$. Tenuto conto di (QH 1) si ha:

$$F(x) = |\lambda|^2 F(x_1),$$

e quindi, ricordando la (2.1),

$$(4.1) \quad F(x) = F(x_1)f(x).$$

Poiché $F(x_1)$ è reale la (4.1) prova l'affermazione fatta (4).

Stabiliremo che sussiste anche l'affermazione inversa, dimostrando così il

TEOREMA 2. - *Sopra una varietà a struttura quasi quaternionale generalizzata, condizione necessaria e sufficiente affinché una metrica riemanniana (generale) sia hermitiana, è che subordini la metrica conforme intrinseca sulle faccette caratteristiche tangenti.*

Ci resta da provare la sufficienza della condizione.

Sullo spazio tangente $T_x \equiv V_{4n} \equiv \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$ sia $\hat{F}$ la forma quadratica determinata dalla metrica riemanniana. Per l'ipotesi posta, per ogni vettore non nullo $x_1 \in \mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$ e ogni $\lambda \in \mathfrak{Q}$, si ha:

$$\hat{F}(x_1 \lambda) = \rho(x_1)f(x_1 \lambda) = \rho(x_1)|\lambda|^2,$$

ove $\rho(x_1)$ è un numero reale funzione di x_1 .

Facendo nella precedente $\lambda = 1$, viene $\rho(x_1) = \hat{F}(x_1)$, e quindi si ha:

$$(4.2) \quad \hat{F}(x_1 \lambda) = |\lambda|^2 \hat{F}(x_1).$$

Si tratta di mostrare che $\hat{F}$ definisce una forma quadratica hermitiana su $\mathfrak{V}_n^{\mathfrak{Q}}$, cioè che per $\hat{F}$ sono soddisfatte le (QH 1, 2).

La (QH 1) è già espressa dalla (4.2).

Per esaminare la (QH 2) si osservi in primo luogo che l'applicazione Φ ivi definita può scriversi nel modo seguente, giovandosi della forma bilineare simmetrica $\hat{\Phi}$ associata ad $\hat{F}$ come in (Q 2) e tenuto conto di (4.2):

$$(4.3) \quad \Phi(x, y) = \hat{\Phi}(x, y) + i \hat{\Phi}(xi, y) + j \hat{\Phi}(xj, y) + k \hat{\Phi}(xk, y).$$

Dobbiamo dimostrare che la Φ data da (4.3) è sesquilineare hermitiana, cioè soddisfa le condizioni (SH 1, 2, 3) del n. 3.

La (SH 1) è ovvia conseguenza della $\mathfrak{R}$ -bilinearità di $\hat{\Phi}$.

Proviamo la prima delle (SH 2). Da (4.3) si ha:

$$\begin{aligned} \Phi(xi, y) &= \hat{\Phi}(xi, y) + i \hat{\Phi}(-x, y) + j \hat{\Phi}(xk, y) + k \hat{\Phi}(-xj, y) \\ &= -i [i \hat{\Phi}(xi, y) + \hat{\Phi}(x, y) + k \hat{\Phi}(xk, y) + j \hat{\Phi}(xj, y)] \\ &= -i \Phi(x, y), \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\Phi(xj, y) = -j \Phi(x, y), \quad \Phi(xk, y) = -k \Phi(x, y).$$

(4) Se non si pone la condizione che la metrica hermitiana sia definita positiva, $F(x_1)$ può anche essere ≤ 0 , e si intenderà lo stesso che la metrica subordinata su $\mathfrak{V}_1^{\mathfrak{Q}}$ è quella conforme intrinseca, in quanto in ogni caso ottenuta alterando per un fattore reale la metrica definita da f .

Ne segue subito la prima delle (SH 2).

Passiamo a dimostrare la (SH 3). Si ha:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(xi, y) &= \frac{1}{2} [\hat{F}(xi + y) - \hat{F}(xi) - \hat{F}(y)] \\ &= \frac{1}{2} [\hat{F}((x - yi)i) - \hat{F}(xi) - \hat{F}(y)],\end{aligned}$$

e quindi, in virtù di (4.2),

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(xi, y) &= \frac{1}{2} [\hat{F}(x - yi) - \hat{F}(x) - \hat{F}(-yi)] \\ &= \hat{\Phi}(x, -yi) \\ &= \hat{\Phi}(-yi, x) \\ &= -\hat{\Phi}(yi, x).\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene:

$$\hat{\Phi}(xj, y) = -\hat{\Phi}(yj, x) \quad , \quad \hat{\Phi}(xk, y) = -\hat{\Phi}(yk, x),$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\Phi(y, x) &= \hat{\Phi}(y, x) + i\hat{\Phi}(yi, x) + j\hat{\Phi}(yj, x) + k\hat{\Phi}(yk, x) \\ &= \hat{\Phi}(x, y) - i\hat{\Phi}(xi, y) - j\hat{\Phi}(xj, y) - k\hat{\Phi}(xk, y) \\ &= \overline{\Phi(x, y)}.\end{aligned}$$

Resta a provare la seconda delle (SH 2). Ma questa è già conseguenza della prima delle (SH 1) e di (SH 3), perché

$$\Phi(x, y\lambda) = \overline{\Phi(y\lambda, x)} = \overline{\lambda \Phi(y, x)} = \overline{\Phi(y, x)} \lambda = \Phi(x, y) \lambda.$$

È così completamente dimostrato il teorema.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. 9, Hermann, Paris (1959).
- [2] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, « Annali di Mat. pura e appl. », **43**, 313-324 (1957).
- [3] — *Sulle varietà a struttura complessa o quasi complessa*, « Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari », 52-53 (1960).
- [4] — *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, « Rend. Lincei », **26**, 353-362 (1959).
- [5] — *Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale*, « Annali di Mat. pura ed appl. », **49**, 73-90 (1960).
- [6] — *Variétés à structure quaternionienne généralisée*, « Rev. Roumaine de Math. pures et appl. », **10**, 912-922 (1965).

SUMMARY. — On the characteristic tangent elements (« faccette tangenti caratteristiche ») $V_4^{(c)}$ of a generalized almost quaternion manifold M_{4n} , an intrinsic conformal Euclidean metric exists. A Riemannian metric on M_{4n} is quaternion Hermitian if and only if the intrinsic conformal metric is induced on each $V_4^{(c)}$.