Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elisa Udeschini Brinis

Campi fisici bivettoriali e loro genesi variazionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.5, p. 269–276.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_5_269_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Fisica matematica. — *Campi fisici bivettoriali e loro genesi variazionale.* Nota[(*)] di ELISA UDESCHINI BRINIS, presentata[(**)] dal Socio B. FINZI.

Un metodo generale per individuare un campo fisico spazio–temporale è quello di valersi di un principio variazionale:

$$\delta \int_{\tau} \mathfrak{L}\, d\tau = 0 \tag{1}$$

che affermi la stazionarietà dell'integrale, esteso ad una qualsivoglia regione spazio–temporale τ, di un invariante $\mathfrak{L}$ (densità lagrangiana) costruito con gli enti spazio–temporali che caratterizzano il campo. Tale invariante risulta, ordinariamente, funzione dei potenziali del campo e delle loro derivate prime spazio–temporali e la sua stazionarietà deve aver luogo per una generica variazione dei potenziali stessi.

Per ottenere le equazioni indefinite di campo, si impone che la variazione dei potenziali ne rispetti i valori al contorno. Se poi la variazione è tutto affatto arbitraria, da (1) si possono anche dedurre le condizioni al contorno.

Le equazioni che così si stabiliscono risultano compatibili e possiedono carattere invariantivo nello spazio–tempo rispetto ad un generico cambiamento di riferimento, soddisfacendo così al principio di relatività generale.

In tal modo vengono ad esempio studiati campi fisici particolarmente notevoli (come quello elettromagnetico nel vuoto) caratterizzati da un tensore doppio emisimmetrico $G_{\alpha\beta}$ irrotazionale.

Si introduce un unico potenziale vettore Φ_α tale che:

$$G_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} \qquad (\alpha\,,\beta\cdots = 0\,,1\,,2\,,3); \tag{2}$$

si considera una densità lagrangiana dipendente dal solo vettore Φ_α e dalle sue derivate prime; dal principio (1) si traggono allora le equazioni indefinite che, unite alle (2), forniscono le equazioni del campo $G_{\alpha\beta}$ [(1)].

Campi cosiffatti vengono ordinariamente denominati campi vettoriali, perché individuati da un potenziale vettore Φ_α.

In questa Nota osservo che, per un generico campo caratterizzato da un tensore doppio emisimmetrico $G_{\alpha\beta}$, irrotazionale o no, *tutte* le equazioni di campo si possono trarre dal principio variazionale (1).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1965.

(1) Cfr. ad esempio: H. WEYL, « Ann. der Phys. », *54*, 118 (1917); E. M. CORSON, *Introduction to Tensors, Spinors, and relativistic wave–equations*, Blackie & Son Limited, London and Glasgow (1953); M. A. TONNELAT, *Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité*, Masson et C[ie], Paris (1959).

Ciò grazie ad una estensione del teorema di Clebsch, che permette di esprimere un generico tensore doppio emisimmetrico $G_{\alpha\beta}$ dello spazio–tempo mediante le derivate prime di *due* vettori potenziali (cui si può imporre la condizione di solenoidalità), secondo la relazione [2]:

$$G_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \Psi^{\gamma/\delta} \qquad (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{tensore di Ricci}) \tag{3}$$

con $\Phi_{\alpha}{}^{/\alpha} = 0$ e $\Psi^{\alpha}{}_{/\alpha} = 0$.

Si può infatti esprimere la densità lagrangiana mediante i due potenziali vettori Φ_α e Ψ^α e le loro derivate. Dal principio (1), operando la variazione sui due potenziali, si deducono allora tutte le equazioni di campo (comprese quelle che traducono l'irrotazionalità di $G_{\alpha\beta}$, nel caso particolare sopra citato).

A tali campi daremo il nome di *campi bivettoriali*, perché individuati dai due vettori Φ_α e Ψ^α.

Considero dapprima una generica densità lagrangiana funzione di un solo tensore doppio emisimmetrico: $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(G_{\alpha\beta})$ e poi di esso e dei suoi potenziali: $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(G_{\alpha\beta}, \Phi_\alpha, \Psi^\alpha)$. Generalizzando il procedimento seguito da B. Finzi per dedurre le equazioni del campo elettromagnetico [3], stabilisco le corrispondenti equazioni di campo; deduco poi (con opportuna variazione dei potenziali) l'espressione del tensore energetico canonico $H_{\varrho\nu}$ che risulta solenoidale.

Supposto infine che la precedente lagrangiana dipenda anche da un vettore I^α, funzione assegnata dei punti dello spazio–tempo (come avviene, ad esempio, con il vettore distribuzione elettrica j^α del campo elettromagnetico non neutro), stabilisco le equazioni di campo e trovo che il tensore energetico canonico $H_{\varrho\nu}$ non è più solenoidale.

Rientrano in quest'ultimo caso il campo maxwelliano non neutro ed altri campi, fra cui quello di Proca–Yukawa, più generali di quello elettromagnetico [4].

1. Lagrangiana funzione solo di un tensore emisimmetrico. –

Consideriamo una densità lagrangiana:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(G_{\alpha\beta}) \tag{4}$$

funzione soltanto di un tensore doppio emisimmetrico $G_{\alpha\beta}$ definito nello spazio–tempo quadridimensionale pseudoeuclideo e atto a caratterizzare un campo fisico.

Ricordando il teorema (3), diciamo Φ_α e Ψ_α i due vettori potenziali del tensore $G_{\alpha\beta}$, funzioni regolari dei punti dello spazio–tempo.

(2) B. Finzi, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*, questi «Rendiconti», ser. VIII, *12* (1952). Cfr. anche: B. Finzi–M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna (1962), p. 414. La (3) esprime il tensore doppio $G_{\alpha\beta}$ come somma di un tensore irrotazionale $\Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta}$ e di uno solenoidale $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\Psi^{\gamma/\delta}$.

(3) B. Finzi, loco cit.

(4) B. Finzi, loco cit. Nota I e II; Idem, *Sopra una estensione dei campi elettromagnetici*, questi «Rendiconti», ser. VIII, *13* (1952).

Le equazioni indefinite di campo si possono trarre dal principio variazionale (1), quando si operi la variazione lasciando inalterati entrambi i potenziali Φ_α e Ψ^{*}_α al contorno σ di τ.

Sviluppo in questo primo caso i calcoli che si potrebbero ripetere quasi inalterati nei casi successivi.

Per la (3):

$$\delta G_{\alpha\beta} = \delta\Phi_{\beta/\alpha} - \delta\Phi_{\alpha/\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\, \delta\Psi^{*\gamma/\varrho}. \tag{3'}$$

Si ha pertanto:

$$\delta\int_\tau \mathfrak{L}\,(G_{\alpha\beta})\, d\tau = \int_\tau \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\, \delta G_{\alpha\beta}\, d\tau =$$

$$= \int_\tau \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right) \delta\Phi_{\beta/\alpha}\, d\tau + \int_\tau \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\, \delta\Psi^{*\gamma/\varrho}\, d\tau =$$

$$= \int_\tau \left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right) \delta\Phi_\beta\right]_{/\alpha} d\tau + \int_\tau \left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\, \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\, \delta\Psi^{*\gamma}\right]^{/\varrho} d\tau +$$

$$- \int_\tau \left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha} \delta\Phi_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho} \delta\Psi^{*\gamma}\right\} d\tau.$$

Per i noti teoremi sulla trasformazione di integrali, supposta la regolarità delle funzioni nel campo, e indicando con n_α il versore normale al contorno σ, volto verso l'esterno:

$$\delta\int_\tau \mathfrak{L}\,(G_{\alpha\beta})\, d\tau = \int_\sigma \left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right) n_\alpha\, \delta\Phi_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\, \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\, n^\varrho\, \delta\Psi^{*\gamma}\right\} d\sigma +$$

$$- \int_\tau \left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha} \delta\Phi_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho} \delta\Psi^{*\gamma}\right\} d\tau$$

ed essendo, su σ, $\delta\Phi_\beta = 0$ e $\delta\Psi^{*\gamma} = 0$:

$$\delta\int_\tau \mathfrak{L}\,(G_{\alpha\beta})\, d\tau = - \int_\tau \left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha} \delta\Phi_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho} \delta\Psi^{*\gamma}\right\} d\tau. \tag{5}$$

Affinché sia $\delta\int_\tau \mathfrak{L}\, d\tau = 0$, qualunque siano, nella regione τ, $\delta\Phi_\beta$ e $\delta\Psi^{*\gamma}$, dovrà essere:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha} = 0 \\ &\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho} = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Viceversa, se le (6) sono soddisfatte, risulta verificata la (1).

Le (6) sono le equazioni di campo: si tratta di otto equazioni nelle sei incognite $G_{\alpha\beta}$. Sussistono però le due identità, che le riducono a sei indipendenti:

$$(7) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha\beta} = 0 \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho\gamma} = 0 \,. \end{cases}$$

Se, in particolare, prendiamo $\delta G_{\alpha\beta}$ funzione lineare omogenea delle derivate $G_{\alpha\beta/\nu}$:

$$(8) \qquad \delta G_{\alpha\beta} = \eta^\nu \, G_{\alpha\beta/\nu} \qquad \text{(con } \eta^\nu \text{ infinitesimi arbitrari)}$$

e quindi anche:

$$(9) \qquad \delta \Phi_\beta = \eta^\nu \, \Phi_{\beta/\nu} \quad ; \quad \delta \Psi^{*\gamma} = \eta^\nu \, \Psi^{*\gamma}{}_{/\nu}$$

la (1) fornisce, analogamente a quanto avviene in meccanica analitica, un teorema di conservazione espresso dalla solenoidalità di un tensore doppio.

Per la (5) e per le (9), indicando con $g_{\alpha\beta}$ il tensore fondamentale:

$$\delta \int_\tau \mathfrak{L}(G_{\alpha\beta})\, d\tau = - \int_\tau \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha} \Phi_{\beta/\nu} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho} \Psi^{*\gamma}{}_{/\nu} \right\} \eta^\nu \, d\tau =$$

$$= - \int_\tau \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} (g_{\varrho\alpha} \, \Phi_{\beta/\nu} - g_{\varrho\beta} \, \Phi_{\alpha/\nu}) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} \Psi^{*\gamma}{}_{/\nu} \right]^{/\varrho} \eta^\nu \, d\tau +$$

$$+ \int_\tau \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} (\Phi_{\beta/\nu\alpha} - \Phi_{\alpha/\nu\beta}) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} \Psi^{*\gamma}{}_{/\nu}{}^{\varrho} \right\} \eta^\nu \, d\tau$$

ed essendo:

$$\mathfrak{L}_{/\nu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} G_{\alpha\beta/\nu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} (\Phi_{\beta/\alpha\nu} - \Phi_{\alpha/\beta\nu} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \Psi^{*\gamma/\varrho}{}_{\nu})$$

si ha:

$$(10) \qquad \delta \int_\tau \mathfrak{L}(G_{\alpha\beta})\, d\tau = - \int_\tau \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} (g_{\varrho\alpha} \, \Phi_{\beta/\nu} - g_{\varrho\beta} \, \Phi_{\alpha/\nu} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \Psi^{*\gamma}{}_{/\nu}) - \mathfrak{L} g_{\varrho\nu} \right]^{/\varrho} \eta^\nu \, d\tau \,.$$

Posto:

$$(11) \qquad H_{\varrho\nu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} (g_{\varrho\alpha} \, \Phi_{\beta/\nu} - g_{\varrho\beta} \, \Phi_{\alpha/\nu} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \Psi^{*\gamma}{}_{/\nu}) - \mathfrak{L} g_{\varrho\nu}$$

affinché la (10) verifichi la (1) qualunque siano gli η^ν, deve sussistere la:

$$(12) \qquad H_{\varrho\nu}{}^{/\varrho} = 0$$

che afferma la solenoidalità del tensore energetico canonico $H_{\varrho\nu}$, definito mediante la (11).

Considerando il caso particolare in cui $G_{\alpha\beta}$ è il tensore elettromagnetico ($G_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$ di potenziali φ_α e ψ_α) e l'azione è quella di puro campo elettromagnetico:

$$\int_\tau \mathfrak{L}\, d\tau = \int_\tau \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}\, d\tau$$

si ritrovano i noti risultati.

Le (6) si riducono infatti a:

$$(13) \qquad \begin{cases} F^{\beta\alpha}{}_{/\alpha} = 0 \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\beta\alpha/\varrho} = 0 \end{cases}$$

ed il tensore energetico canonico a:

$$H_{\varrho\nu} = F^{\beta}_{\cdot\varrho}\, \varphi_{\beta/\nu} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\beta\alpha} \psi^{\gamma}{}_{/\nu} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha} g_{\varrho\nu}$$

o ancora, ponendo $\psi^\gamma = 0$ per la seconda delle (13):

$$(14) \qquad H_{\varrho\nu} = F^{\beta}_{\cdot\varrho}\, \varphi_{\beta/\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\varrho\nu}\ {}^{(5)}.$$

Il tensore $H_{\varrho\nu}$ non è simmetrico, a differenza del consueto tensore energetico elettromagnetico $E_{\varrho\nu}$ [6].

2. LAGRANGIANA FUNZIONE DI UN TENSORE EMISIMMETRICO E DEI SUOI POTENZIALI. – Supponiamo ora che la densità lagrangiana, oltre che da un tensore doppio emisimmetrico, dipenda anche esplicitamente dai suoi due potenziali. Si abbia cioè:

$$(15) \qquad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,(G_{\alpha\beta}\,,\, \Phi_\alpha\,,\, \Psi^\alpha).$$

Per ottenere le equazioni di campo possiamo procedere come nel caso precedente. Sarà:

$$(16) \qquad \delta \int_\tau \mathfrak{L}\,(G_{\alpha\beta}\,,\, \Phi_\beta\,,\, \Psi^\gamma)\, d\tau = \int_\tau \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\, \delta G_{\alpha\beta}\, d\tau + \int_\tau \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_\beta}\, \delta\Phi_\beta + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi^\gamma}\, \delta\Psi^\gamma \right) d\tau$$

e, se su σ $\delta\Phi_\beta = 0$ e $\delta\Psi^\gamma = 0$, per la (5):

$$(5') \qquad \delta \int_\tau \mathfrak{L}\, d\tau = -\int_\tau \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}} \right)_{/\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_\beta} \right] \delta\Phi_\beta\, d\tau + \\ - \int_\tau \left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} \right)^{/\varrho} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi^\gamma} \right] \delta\Psi^\gamma\, d\tau.$$

(5) Cfr. CORSON, loco cit., p. 80.

(6) $E_{\varrho\nu} = F^{\beta}_{\cdot\varrho} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\varrho\nu}$. Si ha: $E_{\varrho\nu} = H_{\varrho\nu} - F^{\beta}_{\cdot\varrho}\, \varphi_{\nu/\beta}$.

Le equazioni di campo diventano quindi:

$$(6')\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha} = \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_\beta} \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho} = \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi^{*\gamma}} . \end{cases}$$

Dalle (6′), ricordando le identità (7), si deduce che devono essere verificate le due relazioni:

$$(7')\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_\beta}\right)_{/\beta} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi^{*\gamma}}\right)^{/\gamma} = 0 . \end{cases}$$

Se, come nei casi più comuni, $\mathfrak{L}$ è funzione quadratica dei suoi argomenti, si constata immediatamente che le (7′) sono senz'altro verificate ove siano sottoposti i potenziali alla condizione di solenoidalità.

Per ottenere l'espressione del tensore energetico canonico, scegliamo le variazioni dei potenziali funzioni lineari omogenee delle derivate (conformemente alle (9)).

Per la (5′) e per le (9):

$$(17)\qquad \delta \int_\tau \mathfrak{L}(G_{\alpha\beta}, \Phi_\beta, \Psi^{*\gamma})\, d\tau = -\int_\tau \left\{\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_\beta}\right] \Phi_{\beta/\nu} + \right.$$
$$\left. + \left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi^{*\gamma}}\right] \Psi^{*\gamma}{}_{/\nu}\right\} \eta^\nu\, d\tau .$$

Con sviluppi perfettamente analoghi a quelli del caso precedente ed osservando che ora:

$$\mathfrak{L}_{/\nu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} G_{\alpha\beta/\nu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_\beta} \Phi_{\beta/\nu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi^{*\gamma}} \Psi^{*\gamma}{}_{/\nu}$$

si ha di nuovo la (10) e quindi la (12) con $H_{\varrho\nu}$ definito dalla (11).

Anche in questo caso, cioè, si deduce la solenoidalità del tensore energetico canonico, la cui espressione è ancora data dalla (11).

Se, in particolare, $G_{\alpha\beta}$ coincide con il tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ e come densità lagrangiana si assume:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha} + \frac{1}{4\Lambda^2} \varphi_\alpha \varphi^\alpha$$

(essendo Λ una costante universale) le equazioni (6′) si riducono a quelle del campo mesonico neutro:

$$(18)\qquad \begin{cases} F^{\beta\alpha}{}_{/\alpha} = \dfrac{1}{2\Lambda^2} \varphi^\beta \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\beta\alpha/\varrho} = 0 . \end{cases}$$

Il tensore energetico canonico, in tal caso, diventa:

$$H_{\varrho\nu} = F^{\beta}_{\cdot\varrho}\, \varphi_{\beta/\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta}\, g_{\varrho\nu} - \frac{1}{4\Lambda^2}\, \varphi_\alpha\, \varphi^\alpha\, g_{\varrho\nu} \tag{19}$$

avendo posto $\psi^\gamma = 0$, per la seconda delle (18).

3. LAGRANGIANA FUNZIONE DI UN TENSORE EMISIMMETRICO, DEI SUOI POTENZIALI E DI UN VETTORE DISTRIBUZIONE ASSEGNATO. – Generalizzando ulteriormente la densità lagrangiana, supponiamo che essa, oltre che da un tensore doppio e dai suoi potenziali, dipenda anche da un vettore di distribuzione I^α, funzione assegnata dei punti dello spazio–tempo. Sia, cioè:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,(G_{\alpha\beta}\,,\, \Phi_\alpha\,,\, \Psi^{\cdot\alpha},\, I^\alpha). \tag{20}$$

Valendoci sempre del principio (1) ed osservando che la variazione opera sui potenziali, ma non sul vettore I^α, ritroviamo immutate la (16) e la (5′).

Le equazioni di campo sono quindi ancora le (6′) ed ancora devono essere verificate le (7′).

Nel caso in cui $\mathfrak{L}$ è funzione quadratica dei suoi argomenti, si verifica immediatamente che le (7′), allorché i potenziali sono solenoidali, impongono la solenoidalità del vettore I^α:

$$I^\alpha_{\ /\alpha} = 0\,. \tag{21}$$

Se si scelgono le variazioni dei potenziali conformi alle (9), si ottiene ancora la (17); ma essendo:

$$\mathfrak{L}_{/\nu} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\, G_{\alpha\beta/\nu} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_\beta}\, \Phi_{\beta/\nu} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Psi^{\cdot\gamma}}\, \Psi^{\cdot\gamma}_{\ /\nu} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial I^\alpha}\, I^\alpha_{\ /\nu}$$

ricordando i calcoli del n. 1, in luogo della (10) si ha:

$$\delta \int_\tau \mathfrak{L}\,(G_{\alpha\beta}\,,\, \Phi_\beta\,,\, \Psi^{\cdot\gamma},\, I^\alpha)\, d\tau = \tag{22}$$

$$= -\int_\tau \left\{ \left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} (g_{\varrho\alpha}\, \Phi_{\beta/\nu} - g_{\varrho\beta}\, \Phi_{\alpha/\nu} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\, \Psi^{\cdot\gamma}_{\ /\nu}) - \mathfrak{L}\, g_{\varrho\nu} \right]^{/\varrho} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial I^\alpha}\, I^\alpha_{\ /\nu} \right\} \eta^\nu\, d\tau.$$

Affinché la (22) verifichi la (1) qualunque siano gli η^ν, dovrà quindi essere:

$$H_{\varrho\nu}^{\ \ /\varrho} = -\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial I^\alpha}\, I^\alpha_{\ /\nu} \tag{23}$$

con $H_{\varrho\nu}$ definito sempre dalla (11).

A differenza dei casi precedenti, il tensore energetico canonico $H_{\varrho\nu}$ non è più solenoidale.

Considerando il caso particolare in cui $G_{\alpha\beta}$ è il tensore elettromagnetico ($G_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$), I^α il vettore distribuzione elettrica ($I^\alpha = j^\alpha$) e come densità lagrangiana si assume la:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha} + \varphi_\alpha j^\alpha$$

si ritrovano risultati noti.

Le (6′) diventano infatti le equazioni del campo elettromagnetico non neutro:

$$(24) \qquad \begin{cases} F^{\beta\alpha}{}_{/\alpha} = j^\beta \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\beta\alpha/\varrho} = 0 . \end{cases}$$

Le (7′) esprimono il principio di conservazione dell'elettricità (la prima diviene infatti $j^\beta{}_{/\beta} = 0$, mentre la seconda è identicamente soddisfatta).

La (23), infine, dà:

$$(25) \qquad H_{\varrho\nu}{}^{/\varrho} = -\varphi_\alpha j^\alpha{}_{/\nu}$$

con:

$$(26) \qquad H_{\varrho\nu} = F^\beta{}_{\cdot\varrho} \varphi_{\beta/\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\varrho\nu} - j^\beta \varphi_\beta g_{\varrho\nu}$$

e con facili calcoli si verifica che ciò si accorda con il ben noto risultato che la divergenza del tensore energetico elettromagnetico simmetrico $E_{\varrho\nu}$ uguaglia le forze ponderomotrici $F_{\nu\beta} j^\beta$ [7].

Così pure, se come densità lagrangiana $\mathfrak{L}$ si assume una generica combinazione lineare di invarianti quadratici costruiti con gli elementi: $F_{\alpha\beta}$, j^α, φ_α, ψ^α, le (6′) coincidono con le equazioni stabilite da Finzi per campi che generalizzano quello elettromagnetico [8].

(7) Essendo: $E_{\varrho\nu} = F^\beta{}_{\cdot\varrho} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\varrho\nu}$, si ha: $E_{\varrho\nu} = H_{\varrho\nu} - F^\beta{}_{\cdot\varrho} \varphi_{\nu/\beta} + j^\beta \varphi_\beta g_{\varrho\nu}$ e quindi, ricordando le (25) e (24):

$$E_{\varrho\nu}{}^{/\varrho} = H_{\varrho\nu}{}^{/\varrho} - F^{\beta}{}_{\cdot\varrho}{}^{/\varrho} \varphi_{\nu/\beta} - F^\beta{}_{\cdot\varrho} \varphi_\nu{}_{/\beta}{}^{\varrho} + (j^\beta \varphi_\beta)^{/\varrho} g_{\varrho\nu} = -\varphi_\beta j^\beta{}_{/\nu} - j^\beta \varphi_{\nu/\beta} +$$
$$+ j^\beta{}_{/\nu} \varphi_\beta + j^\beta \varphi_{\beta/\nu} = j^\beta (\varphi_{\beta/\nu} - \varphi_{\nu/\beta}) = F_{\nu\beta} j^\beta .$$

(8) B. FINZI, loco primo citato, Nota II e loco secondo citato.

SUMMARY — In this paper we are considering a general field defined in space-time by a second-rank antisymmetric tensor. We can have it depending on *two* potential vectors. From *one* variational principle, by varying the two potentials, all field equations are derived. When potentials are varied in a suitable way, we also obtain an expression of canonical energy-momentum tensor. Several forms of Lagrangian density are considered; as particular cases, equations of known physical fields are found.